

Motions of Trusses and Bipartite Frameworks

By Walter Whiteley*

Topologie Structurale #7, 1982

Les mouvements des reseaux et des charpentes bipartites

* Ce projet de recherche a été subventionné par le CRSNG du Canada (A3568).

Structural Topology #7, 1982

* This research was supported in part by the NSERC of Canada, grant A3568.

Dans un précédent article, (Crapo 1982) décrivait le seul mouvement infinitésimal (ou **secousse**) qui existe dans toute grande pièce du réseau mi-octaédrique-tétraédrique (ou réseau **octet**). Cependant, ce type d'évaluation directe ne nous indique pas comment le mouvement pourrait changer, ou disparaître, si nous déplaçons un des réseaux, rendant l'espacement inégal, ou si nous utilisons des formes alternatives de réseau. Si nous plaçons cet exemple dans le cadre d'un résultat géométrique à effet plus évident, il devient alors clair que plusieurs types de réseaux ont une secousse similaire. Nous découvrons aussi quels types de changements présentent des perspectives de rigidité statique.

Une étude théorique récente portant sur les contraintes et les mouvements d'une charpente bipartite fournit actuellement le cadre géométrique adéquat (Bolker 1980, Whiteley 1981). Nous rappelons qu'une charpente bipartite complète est formée en prenant deux ensembles disjoints de joints, A et B, et en plaçant des barres entre chaque paire de joints, une appartenant à A et une appartenant à B. On peut énoncer le résultat géométrique approprié (Whiteley 1981, Théorème 3ii) de la façon suivante

Si l'on construit une charpente bipartite complète dont tous les joints de A couvrent un plan, tous les joints de B couvrent un second plan et toutes les barres additionnelles sont ajoutées dans A ou dans B, la charpente obtenue aura alors une secousse si et seulement si toutes ces barres additionnelles passent à travers deux points de la ligne d'intersection des deux plans (ou si elles vont dans deux directions si les plans sont parallèles) (**Figure 1**).

Nous débutons par un simple rappel des bases géométriques de ce résultat et nous illustrerons par après leurs conséquences sur les réseaux.

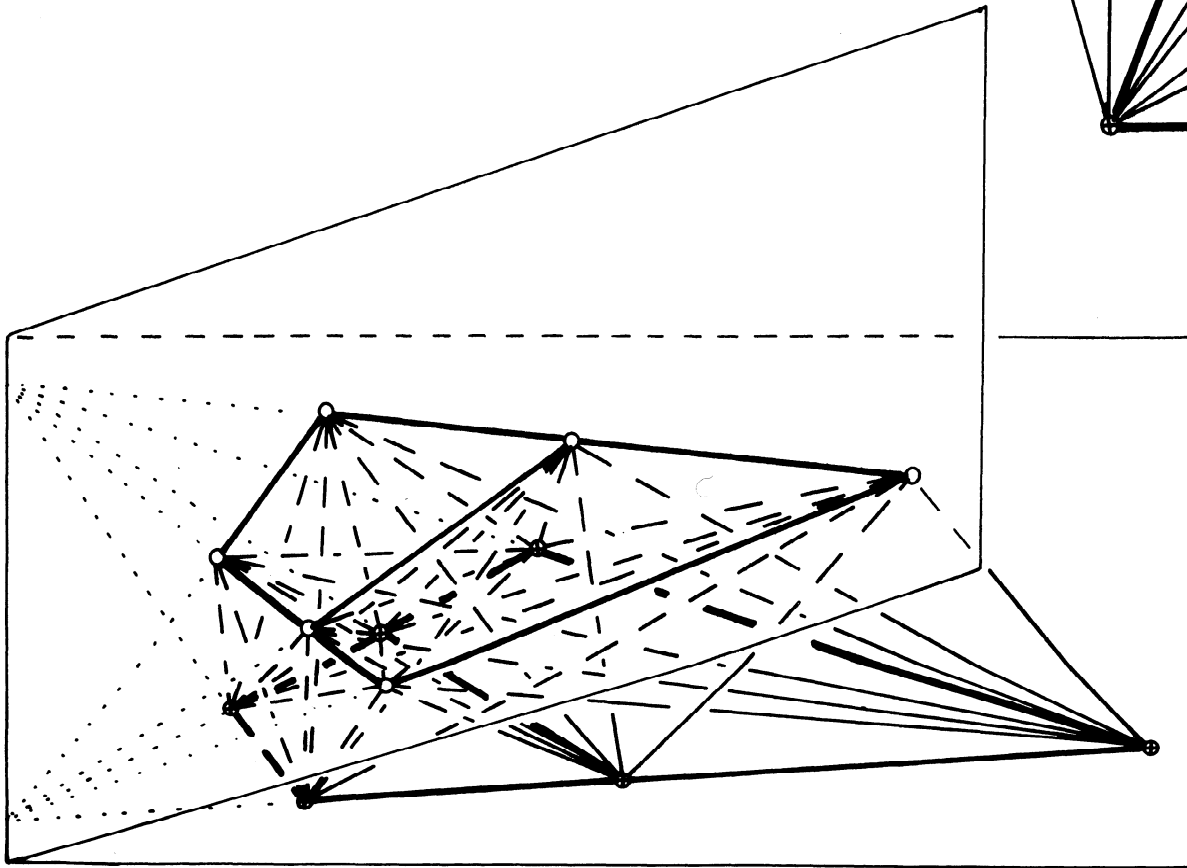
A previous article (Crapo 1982) described the single infinitesimal motion (or **shake**) which exists in any large piece of the half-octahedral-tetrahedral truss (or **octet** truss). However this type of direct computation does not tell us how the motion would change, or disappear, if we shifted one of the grids, made the spacing uneven, or used some alternate form of truss. When we place this example in the setting of a more powerful geometric result, then it becomes clear that many types of truss have a similar shake. We will also discover which types of change hold some prospect for static rigidity.

Recent theoretical work on the stresses and motions of bipartite framework actually provided the proper geometric setting (Bolker 1980, Whiteley 1981). We recall that a complete bipartite framework is formed by taking two disjoint sets of joints, A and B, and placing bars between all pairs of joints, one from A and one from B. The appropriate geometric result (Whiteley 1981, Theorem 3ii) can be expressed as follows:

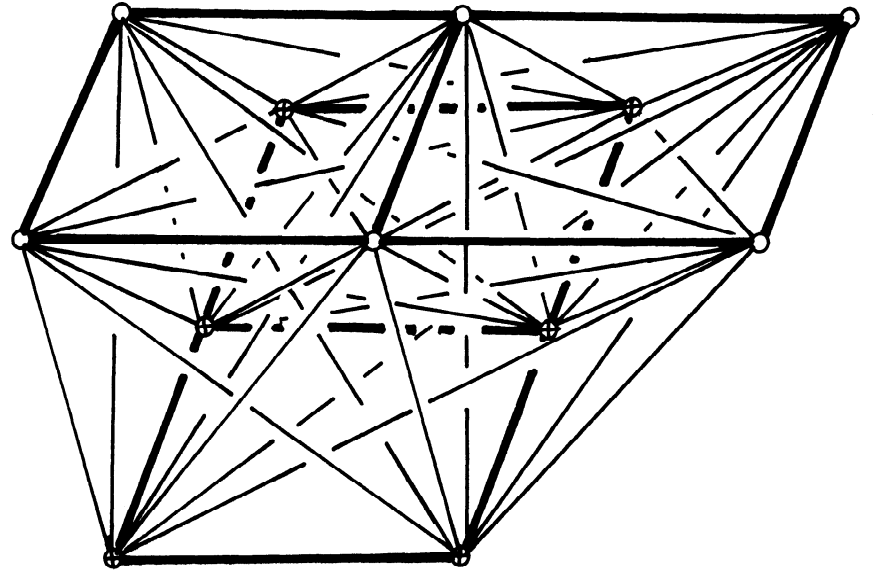
If a complete bipartite framework is built with all joints of A spanning one plane, all joints of B spanning a second plane and additional bars are added within A and within B, then the resulting framework has a shake if and only if all these added bars pass through two points on the line of intersection of the two planes (or run in two directions if the planes are parallel (**Figure 1**)).

We begin with a simple review of the geometric basis for this result and then illustrate its consequences for trusses.

Figure 1 A bipartite framework with all joints on two planes still has one shake (infinitesimal motion) when extended by bars running through two points on the line of intersection of the planes (A) or running in two parallel directions (B). ● Une charpente bipartite ayant tous ses joints sur deux plans comporte encore une secousse (mouvement infinitésimal) lorsqu'elle est prolongée par des barres passant par deux points sur la ligne d'intersection des plans (A) ou se dirigeant en deux directions parallèles (B).



A



B

Une charpente bipartite sur une surface quadrique. Il y a plusieurs années, nous avons observé qu'une charpente bipartite complète secouera si tous les joints reposent sur une surface quadrique (une sphère, un ellipsoïde, un hyperboloïde ou même deux plans (Whiteley 1979). Dans le cas d'une sphère, la secousse fait que tous les joints de l'ensemble A se déplacent de façon radiale vers l'extérieur tandis que tous les joints de l'ensemble B se déplacent de façon radiale vers l'intérieur (**Figure 2A**). Cet exemple peut s'étendre à d'autres surfaces quadriques, soit par géométrie projective ou simplement par l'algèbre (Whiteley 1981). Pour la surface en général, les vitesses obtenues sont toujours perpendiculaires à la surface (**Figure 2B**). (Nos illustrations montrent uniquement des charpentes planes pour des raisons de commodité.)

A Bipartite Framework on a Quadric Surface. Several years ago we observed that a complete bipartite framework will shake if all of its joints lie on a quadric surface (a sphere, an ellipsoid, a hyperboloid, or even two planes) (Whiteley 1979). For a sphere the shake has all joints of set A moving radially outward while all joints of set B move radially inwards (**Figure 2A**). This example generalizes to other quadric surfaces, either by some projective geometry or by some simple algebra (Whiteley 1981). For the general surface, the resulting velocities are always normal to the surface (**Figure 2B**). (Our drawings show plane frameworks, for convenience.)

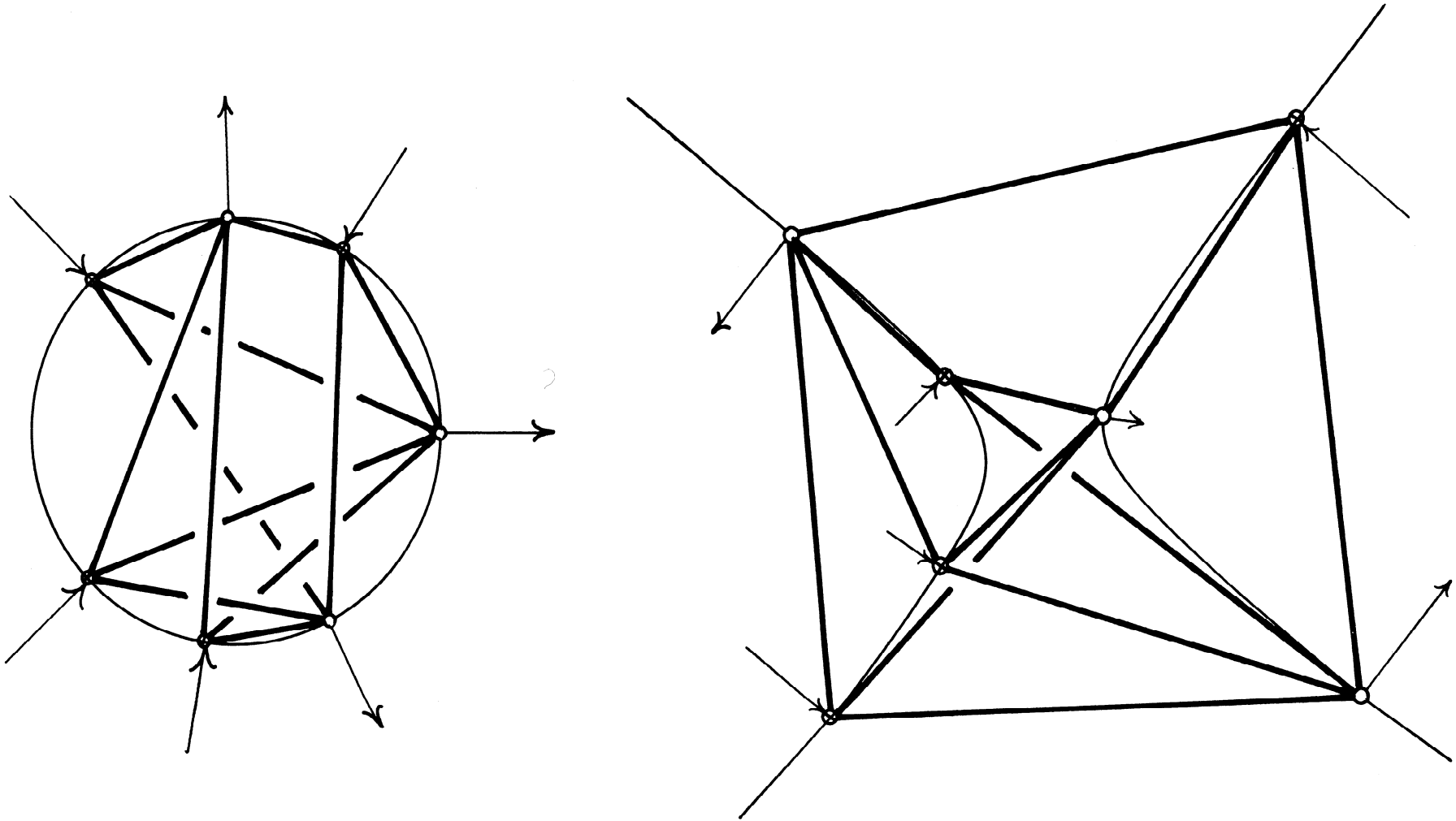


Figure 2 Any bipartite framework with all points on a quadric surface has one shake with all joints assigned velocities normal to the surface (one type moving in, the other type moving out). ● Toute charpente bipartite ayant tous ses joints sur une surface quadrique possède un tremblement avec des vitesses assignées à tous les joints qui sont normales à la surface (un type se déplaçant vers l'intérieur, l'autre type se déplaçant vers l'extérieur).

Des barres additionnelles pour une charpente bipartite secouant. Si nous ajoutons une barre supplémentaire à une charpente bipartite secouant d'une surface quadratique générale, disons une barre qui relierait a_1 et a_2 dans la **Figure 2**, alors cette nouvelle barre sera tordue par la secousse. En conséquence, cette barre additionnelle apportera souvent une rigidité infinitésimale (ou statique), pourvu que les joints couvrent une seule surface quadrique non dégénérée. Il existe cependant un cas spécial important où la barre n'est pas déformée. Si la ligne de la barre réside actuellement dans la surface, alors les deux vitesses à l'emplacement des joints, étant perpendiculaires à la surface et à la nouvelle barre, elles ne déformeront pas les barres (**Figure 3A**). L'hyperboloïde d'une feuille est l'exemple général d'une surface quadrique contenant deux familles de lignes (**Figure 3B**). Sur une telle surface nous pouvons ajouter n'importe quel nombre de barres le long de ces lignes droites dans la surface tout en conservant à la charpente la possibilité de bouger.

Added bars for a Shaky Bipartite Framework. If we add one more bar to a shaky bipartite framework on a general quadratic surface, say joining a_1 and a_2 in **Figure 2**, then this new bar will be distorted by the shake. Accordingly this added bar will often give infinitesimal (or static) rigidity, provided the joints spanned a unique non-degenerate quadric surface. There is, however, an important special case where the bar is not distorted. If the line of the bar actually lies in the surface, then the two velocities at the joints, being normal to the surface and the new bar, will not distort the bar (**Figure 3A**). The hyperboloid of one sheet is the general example of a quadric surface which contains two families of lines (**Figure 3B**). On such a surface we can add any number of bars along these ruling lines and still retain the shake of the framework.

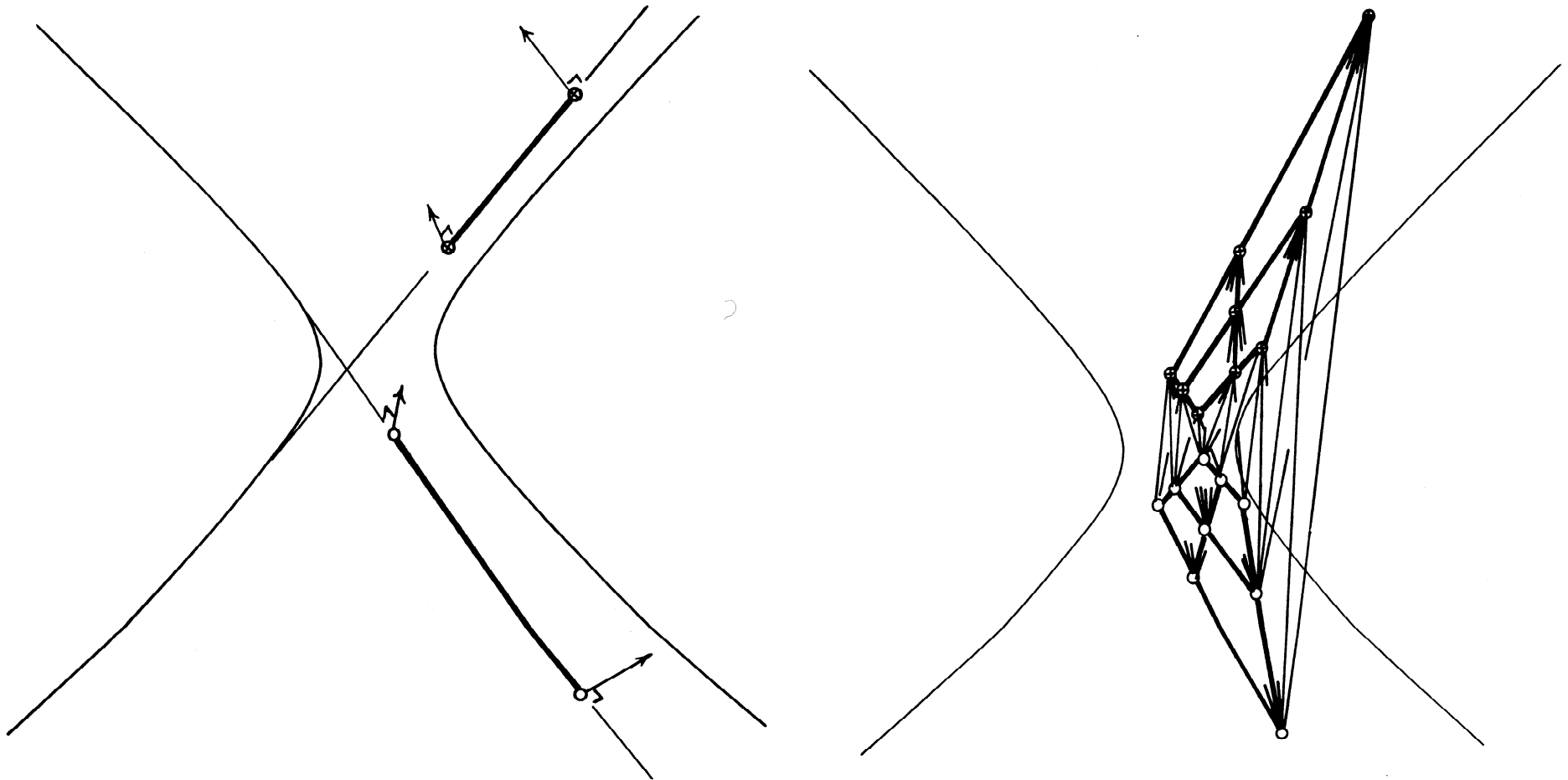


Figure 3 If a bar is added along a ruling line of the quadric surface, the normal velocities are not blocked (A). Any number of such bars will still allow the basic shake (B). ● Si l'on ajoute une barre le long d'une ligne-maitresse de la surface quadrique, les vitesses normales ne sont pas bloquées (A). N'importe quel nombre de barres semblables provoquera encore la secousse fondamentale (B).

Le cas de deux plans. Alors que ces hyperboloïdes présentent un type de mouvement curieux, ils semblent s'écarter du réseau original. La relation est très simple. Si nous prenons une séquence d'hyperboloïdes qui s'approchent, à la limite, de notre paire de plans, alors les lignes de ces surfaces deviendront une simple configuration de quatre faisceaux de lignes à travers deux points sur la ligne d'intersection (**Figure 1A**). (Pour apercevoir cette limite géométriquement, nous notons que les lignes d'un hyperboloïde reposent en deux familles, et chaque ligne d'une famille rejoint toutes les lignes de l'autre famille. A la limite, ces intersections sont conservées et chaque famille devient deux faisceaux, un dans chaque plan.) Si les deux plans sont parallèles, alors les deux centres des faisceaux s'éloignent vers l'infini et les faisceaux deviennent des ensembles de lignes parallèles dans les deux directions.

Ce procédé-limite se produit également lors de la secousse de la charpente et devient alors la base du théorème géométrique cité dans l'introduction. Il n'est pas évident, mais il est vrai que toutes les secousses possibles se présentent de cette manière.

The Case of Two Planes. While these hyperboloids present a curious type of motion, they seem remote from the original truss. The connection is really very simple. If we take a sequence of hyperboloids which approach, in the limit, our pair of planes, then the lines of these surfaces will pass to a simple pattern of four pencils of lines through two points on the line of intersection (**Figure 1A**). (To see this limit geometrically, we note that the lines of an hyperboloid lie in two families, and each line of one family meets all lines of the other family. In the limit these intersections are preserved and each family becomes two pencils, one in each plane.) If the two planes are parallel, then the two centers of the pencils recede to infinity and the pencils become sets of parallel lines in two directions.

This limit process also carries along the shake of the framework, and thus provides the basis for the geometric theorem we quoted in the introduction. It is not obvious, but it is true, that all the possible shakes arise in this way.

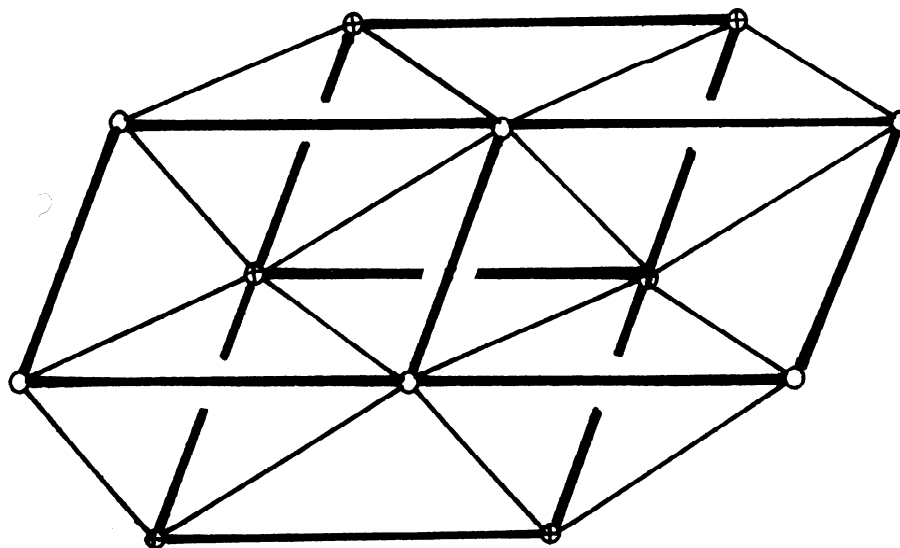


Figure 4 Any piece of the half-octahedral tetrahedral truss is a subframework of a bipartite framework with added bars on the rulings of the two parallel planes. ● Toute pièce du réseau mi-octaédrique tétraédrique est une sous-charpente d'une charpente bipartite avec barres additionnelles sur les structures (rulings) des deux plans parallèles.

Le mouvement caractéristique du réseau octet. Toute section d'un réseau octet peut maintenant être reconnue comme une sous-charpente de ce cas-limite sur deux plans parallèles. Nous conservons une partie mais non toute la charpente bipartite originale reliant les deux plans, et toutes les barres des plans du haut et du bas n'ont que deux directions (**Figure 4**). Il devrait y avoir une secousse, celle décrite par (Crapo 1982).

Cette discussion géométrique nous amène à découvrir plusieurs caractéristiques qualitatives dans la secousse:

(i) Aucune barre additionnelle entre les deux plans n'empêchera la secousse. (Elles ne font que nous ramener à la charpente bipartite branlante.)

(ii) Les lignes des réseaux du haut et du bas demeureront droites durant la secousse et toute tentative pour utiliser de longs membres pour la grille sera également inefficace pour faire cesser la secousse.

(iii) Lorsque nous secouons la charpente les deux plans vont se déformer pour devenir deux hyperboloïdes parallèles. (Cette propriété peut être constatée dans les hyperboloïdes limitrophes et demeure vraie à la limite.) Par conséquent, la forme caractéristique déformée est le sommier de lit tordu. Nous notons que cette figure tordue n'est pas symétrique dans les quatre coins (deux montent et deux descendent), une caractéristique ignorée lors de l'analyse de l'effondrement du Colisée d'Hartford.

The Characteristic Motion of the Octet Truss. Any section of an octet truss can now be recognized as a sub-framework of this limiting case on two parallel planes. We keep some, but not all, of the original bipartite framework joining the two planes, and all bars in the top and bottom planes share two directions (**Figure 4**). There must be one shake, that described in (Crapo 1982).

This geometric discussion leads to several qualitative features in the shake:

(i) No additional bars between the two planes will remove the shake. (They simply return us towards the shaky bipartite framework.)

(ii) The lines of the top and bottom grids will remain straight during the shake and any attempt to use long members for the grid will also be futile in removing the shake.

(iii) When we shake the framework the two planes will warp into two parallel hyperboloids. (This property is seen in the limiting hyperboloids and remains true in the limit.) Thus the characteristic deformed shape is the warped bedspring. We note that this warped pattern is not symmetric in all four corners (two up and two down), a feature ignored in the analysis of the collapse of the Hartford Coliseum.

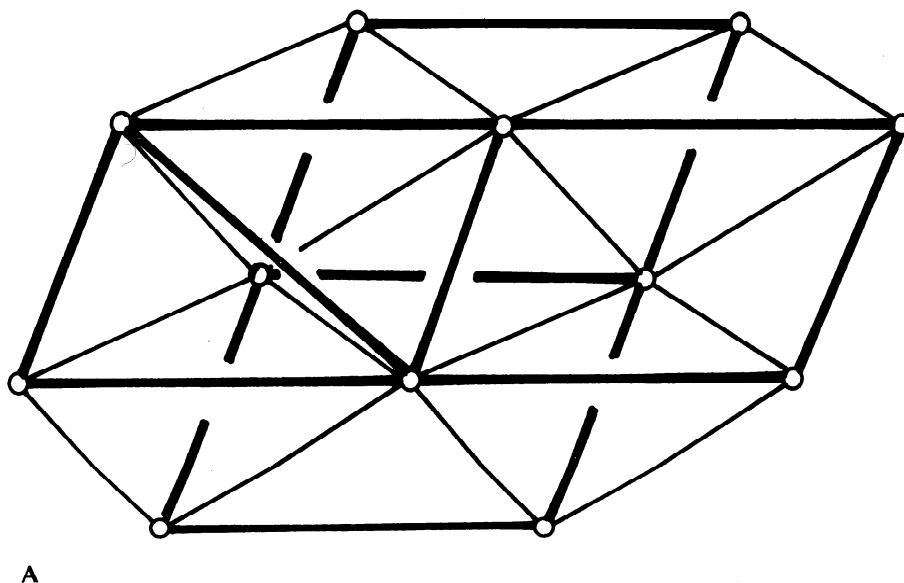
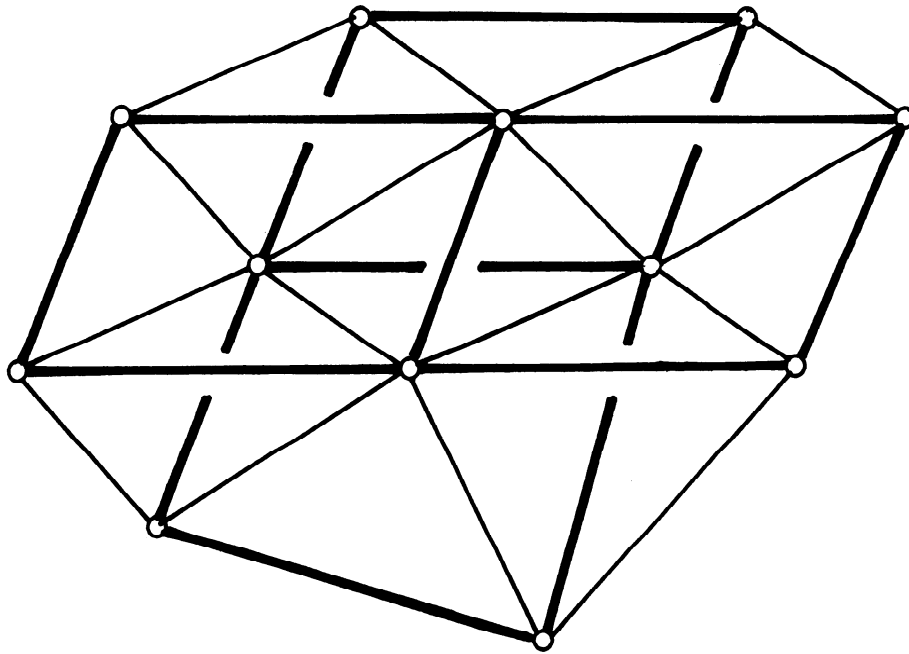
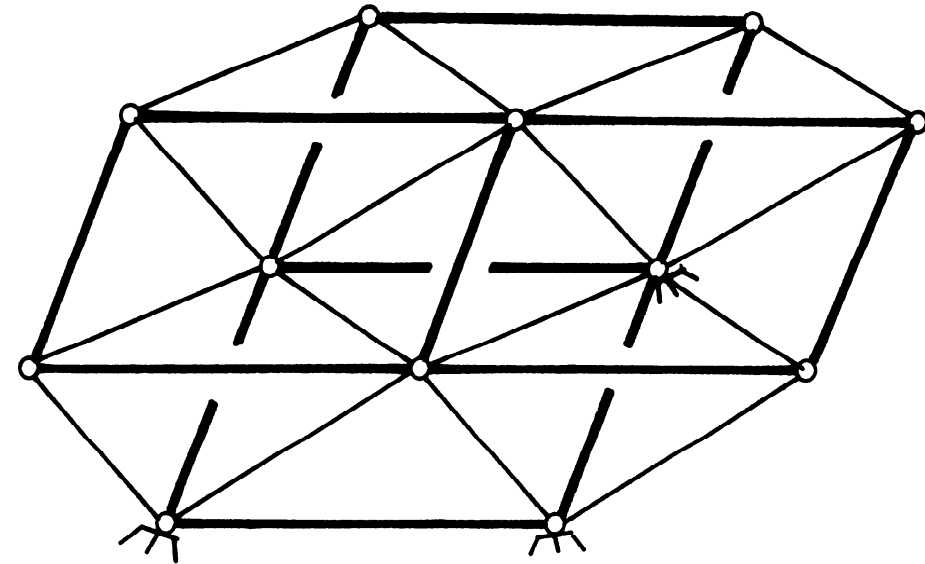


Figure 5. The basic piece of the octet truss becomes infinitesimally rigid when (i) one bar is in a third direction (A), (ii) one joint is lowered to break up the quadric surface (B) or (iii) three points, not on one line, are grounded (C).
 ● La pièce fondamentale du réseau octet devient rigide de manière infinitésimale quand (i) une barre est dans la troisième direction (A), (ii) un joint est abaissé pour briser la surface quadrique (B) ou (iii) trois joints, qui ne sont pas sur la même ligne, sont fixés au sol (C).



B



C

Conditions nécessaires pour une secousse rigide. Quelles modifications devrions-nous faire au réseau **octet** pour obtenir une charpente rigide d'une manière statique? Si nous admettons d'abord qu'il y a une charpente bipartite complète, alors une des modifications suivantes devrait faire l'affaire:

- (i) Utilisez au moins trois directions parmi les réseaux du haut et du bas (c'est-à-dire ajoutez une barre à travers un des carrés de la grille (**Figure 5A**)).
- (ii) Étendez les joints sur plus de deux plans, mais non sur un hyperboloïde (c'est-à-dire tirez un joint vers le haut, ou vers le bas, ou enveloppez le réseau dans un cylindre (**Figure 5B**)).
- (iii) Fixez le réseau au sol à trois points différents non alignés (**Figure 5C**). C'est l'approche habituelle.

Naturellement, toute construction de réseau utilisera moins que la charpente bipartite complète (ce qui serait beaucoup trop fort). Cette réduction dans les barres réduit également les conditions (i), (ii) ou (iii) aux conditions nécessaires à n'importe quel réseau, mais elle enlève la garantie qu'un tel réseau sera statiquement rigide. Dans un prochain article, nous décrirons quelques techniques tirées de l'étude des structures à panneaux articulés (Crapo 1982b) et qui peuvent être utilisées pour trouver les conditions nécessaires à la rigidité statique d'un réseau **octet** déformé de façon à s'étendre hors des deux plans.

Necessary Conditions for a Rigid Truss. What changes should we make in the octet truss to obtain a statically rigid framework? If we first assume that there is a complete bipartite framework present, then one of the following changes would work:

- (i) Use at least three directions among the top and bottom grids (e.g. add one bar across a square of the grid (**Figure 5A**)).
- (ii) Spread the joints over more than two planes, but not on an hyperboloid (e.g. pull one joint up, or down, or wrap the grid onto a cylinder (**Figure 5B**)).
- (iii) Ground the truss at three points, not on a line (**Figure 5C**). This is the usual approach.

Of course any built truss will use less than the complete bipartite framework (which would be heavily overbraced). This reduction in the bars also reduces the conditions (i), (ii) or (iii) to necessary conditions on any truss, but removes the guarantee that such a truss will be statically rigid. In a future article we will describe some techniques drawn from the study of articulated panel structures (Crapo 1982b) can be used to find sufficient conditions for the static rigidity of an octet truss distorted to lie off the two planes.

Bibliographie

Le code dans la première partie de chaque donnée bibliographique consiste en trois parties, séparées par des tirets. La première lettre indique si le texte est un Livre, Article, Pré-impression, ou Notes de cours. La deuxième partie indique si le texte a été rédigé pour des lecteurs qui ont une formation de Mathématicien, Architecte, ou Ingénieur. La partie finale du code indique si le texte touche un ou plus d'un des thèmes principaux de la topologie structurale: Géométrie (en général), Polyédres, Juxtaposition, ou Rigidité.

Les mots-clés ou autres annotations dans la colonne finale montreront l'intérêt de l'article par rapport à la recherche en topologie structurale, pas toujours ni l'ensemble de son contenu ni l'intention de l'auteur.

Bibliography

The code in the first block of each bibliographic item consists of three parts, separated by dashes. The first letter indicates whether the item is a Book, Article, Preprint, or Course notes. The middle letter(s) indicates whether the piece was intended primarily for an audience of Mathematicians, Architects, or Engineers. The final letter(s) indicated if the piece touches on one or more of the principal themes of structural topology: Geometry (in general), Polyhedra, Juxtaposition, or Rigidity.

The key words or other annotations in the third column are intended to show the relevance of the work to research in structural topology, and do not necessarily reflect its overall contents, or the intent of the author.

<p>Bolker 1980</p> <p>Ethan Bolker and Ben Roth</p> <p style="text-align: right;">A—M—R</p>	<p>When is a bipartite graph a rigid framework?</p> <p>Pacific Journal of Math. 90 (1980), 27-44.</p>	<p>Static stresses on bipartite frameworks, quadric surfaces. Contraintes statiques des réseaux bipartites, surfaces quadriques.</p>
<p>Crapo 1982</p> <p>Henry Crapo</p> <p style="text-align: right;">A—ME—R</p>	<p>The Octahedral-Tetrahedral Truss</p> <p>Topologie Structurale 6 (1982)</p>	<p>An infinitesimal motion in the half-octahedral-tetrahedral truss. Un mouvement infinitésimal du réseau demi octaédrique tétraédrique.</p>
<p>Crapo 1982b</p> <p>Henry Crapo and Walter Whiteley</p> <p style="text-align: right;">A—ME—R</p>	<p>Motions of panels and stresses in frameworks</p> <p>Topologie Structurale 6 (1982).</p>	<p>Introduction to the projective theory of stresses and infinitesimal motions, equivalence of stresses and motions for oriented polyhedra Une introduction à la théorie projective des contraintes et des mouvements infinitésimaux, l'équivalence des contraintes et mouvements pour polyèdres orientés.</p>
<p>Whiteley 1979</p> <p>Walter Whiteley</p> <p style="text-align: right;">A—MEA—R</p>	<p>Motions of a bipartite framework</p> <p>Topologie Structurale 3 (1979), 62-63.</p>	<p>Review of Bolker 1980, with observations on motions. Commentaire sur Bolker 1980, avec des observations sur les mouvements.</p>
<p>Whiteley 1981</p> <p>Walter Whiteley</p> <p style="text-align: right;">A—M—R</p>	<p>Infinitesimal motions of a bipartite framework</p> <p>To appear, Pacific Journal of Mathematics</p>	<p>Infinitesimal motions from quadric surfaces, adding bars to a bipartite framework, application to trusses. Les mouvements à partir des surfaces quadriques, l'addition des barres à un réseau bipartite, l'application aux charpentes.</p>