

# The Tetrahedral-Octahedral Truss

by Henry Crapo

Topologie Structurale #7, 1982

## Le réseau tétraédrique-octaédrique

Le réseau tétraédrique/octaédrique, généralement utilisé dans les structures architecturales, est composé de deux grilles carrées dans des plans horizontaux parallèles, les noeuds d'une grille étant situés au centre des carrés de l'autre grille, et chaque noeud étant joint à ses quatre plus proches voisins dans l'autre grille (**Figure 1**). Conséquemment, chaque noeud se trouve au sommet d'un demi-octaèdre et de quatre tétraèdres.

Cet article a pour but de jeter un regard plus approfondi sur ce réseau en particulier, afin de vérifier le fait qu'il n'est pas statiquement rigide. Dans ce plan, lorsqu'un réseau est hissé à sa place, il a tendance à se mettre de travers et, comme un sommier, de sortir hors de sa configuration originale en deux plans parallèles, pour prendre la forme d'un paraboloïde hyperbolique. Ce comportement suggère, mais ne prouve pas mathématiquement, l'existence d'un mouvement (fini ou infinitésimal) découlant de la structure. Le problème réside dans le fait que la torsion observée du modèle physique peut être attribuable aux barres attachées trop faiblement aux joints, ou qu'elle peut être due à l'élasticité des tringles. Nous démontrerons que le mouvement observé est mathématiquement prévisible comme un mouvement infinitésimal du réseau tout entier (même infiniment étendu).

Lorsque nous avons commencé notre collaboration en 1974, Janos Baracs m'a demandé d'étudier cette structure particulière, à cause de son importance pratique. Mais lorsqu'elle est sortie des catégories de structures spatiales pour lesquelles nous commençons à pouvoir avancer des théories géométriques satisfaisantes, nous l'avons mise de côté. Je suis particulièrement heureux de reprendre cette étude maintenant, comme un défi face aux parcelles de théorie sur les structures spatiales que nous avons tenté d'assembler depuis 1974, et comme un rappel insistant que les structures spatiales n'ont pas à être bizarres pour être problématiques.

Structural Topology #7, 1982

The tetrahedral/octahedral truss, commonly used in architectural framing, consists of two square grids in parallel horizontal planes, the nodes of one grid situated at the centres of the squares of the other, with each node joined to its four nearest neighbors in the other grid (**Figure 1**). Each node thus lies at the apex of a half-octahedron, and of four tetrahedra.

The purpose of this research note is to take a close look at this one truss, with an eye to verifying that it is not statically rigid. When a truss on this design is being hoisted into place, it has a tendency to go skew, and like a bedspring to bend out of its original configuration on two parallel planes, into the shape of a hyperbolic paraboloid. This behavior suggests, but does not mathematically prove, the existence of a motion (finite or infinitesimal) permitted by the structure. The difficulty is that the observed twisting of the physical model might be due to bars too loosely fastened at the joints, or due to elasticity of the rods. We shall show that the observed motion is mathematically predictable as an infinitesimal motion of the entire truss (even infinitely extended).

When we first began our collaboration in 1974, Janos Baracs asked me to study this particular structure, because of its practical significance. But when it fell into none of the categories of spatial structures for which we were beginning to advance satisfactory geometric theories, we put it aside. I'm particularly happy to take it up again now, as a challenge to the bits of theory of spatial structures which we have managed to assemble since 1974, and as an urgent reminder that spatial structures don't have to be bizarre to be problematic.

## Une analyse topologique du réseau

Nous dirigeons notre attention sur la plus petite partie du réseau qui démontre le comportement en question (**Figure 2**): un ensemble de noeuds joint par un nombre suffisant de barres pour être statiquement rigide et qui a déjà été observé comme étant pliable dans un modèle physique. Cette pièce consiste en douze noeuds, six dans deux carrés adjacents du plan supérieur, six dans deux carrés de l'autre direction du plan inférieur, ceux-ci étant joints par seize diagonales spatiales. Il y a 30 barres, ce qui est le minimum requis  $30 = 3(12) - 6$  pour constituer un objet à 12 noeuds, rigide dans un espace tridimensionnel.

## A Topological Analysis of the Truss

We direct our attention to the smallest piece of the truss which exhibits the behavior in question (**Figure 2**) a set of nodes joined by enough bars to be statically rigid, yet still observably bendable in a physical model. This piece consists of twelve nodes, six in two adjacent squares on the upper plane, six in two squares in the other direction on the lower plane, these being joined by sixteen space diagonals. There are 30 bars, which is the required minimum  $30 = 3(12) - 6$  for making an object with 12 nodes, rigid in 3-dimensional space.

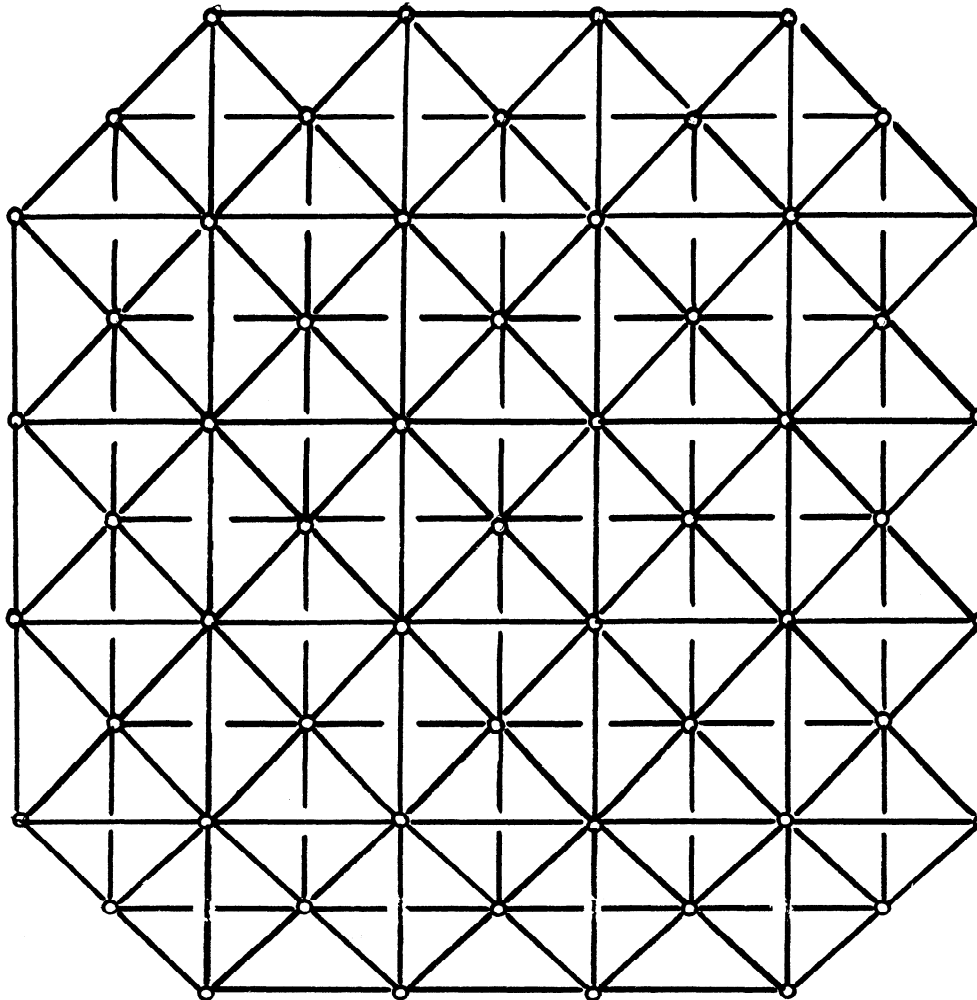


Figure 1

Notez, à propos, que toute portion plus grande de la grille est assurée d'avoir **plus** de barres qu'il ne lui en faut pour être rigide. Par exemple, dans une section rectangulaire comportant  $m - 1$  carrés par  $n$  carrés dans la grille supérieure,  $m$  par  $n - 1$  carrés dans la grille inférieure, il y aura  $2mn - 3m - 3n + 4$  barres excédant les  $3V - 6$  requis. Cette formule donne zéro pour le cas où  $m = n = 2$  comme à la **figure 2**, mais démontre qu'il y aura sûrement 12 barres excédentaires dans la grille partielle de la **figure 1**, où  $m = n = 4$ .

Faisons maintenant quelques rappels de certaines questions traitées dans notre article d'introduction (Crapo 1979). Les configurations de forces en équilibre supportables par une structure forment un espace linéaire dont la dimension est appelée le **rang**  $r$  de la structure. Le rang est inférieur ou égal au nombre  $E$  de barres de la structure, et la différence  $E - r$  est appelée la **nullité** de la structure. Le lecteur se rappellera comment le calcul  $3V - 6$  pour le nombre de barres dans une structure spatiale minimalement rigide à  $V$  noeuds provient des statiques et des mécaniques. Premièrement, une structure statiquement rigide à  $V$  noeuds dans un espace tridimensionnel supportera toutes les configurations des forces en équilibre appliquées, celles-ci formant un espace vectoriel de dimension  $3V - 6$ , comportant  $3V$  façons d'appliquer des forces sur les noeuds, et 6 conditions devant être satisfaites pour l'équilibre. Deuxièmement, les barres sont capables d'éliminer tous les  $3V$  degrés de liberté des noeuds, en conservant les 6 degrés de liberté du mouvement rigide généré par les translations et les rotations de l'espace lui-même. Il faut également se rappeler que le terme **isostatique** s'applique à une structure spatiale comportant  $3V - 6$  barres sur  $V$  noeuds, et qui est statiquement rigide. Conséquemment, elle est minimalement rigide (rigide avec nullité 0). En tant qu'objet topologique, le graphe d'une structure est **génériquement isostatique** s'il y a un moyen de localiser ses noeuds dans l'espace pour qu'elle devienne isostatique. Dans ce qui suit, nous démontrerons que le réseau partiel de la **figure 2** est génériquement isostatique. En pratique, cela signifie que le plus que l'on peut dire en se servant d'arguments énumératifs, arguments basés sur les propriétés du graphe de la structure, c'est que cette structure **peut être statiquement rigide**.

Note, by the way, that any larger portion of the grid is sure to have **more** bars than it needs to be rigid. For instance, in a rectangular section  $m - 1$  squares by  $n$  squares in the upper grid,  $m$  by  $n - 1$  squares in the lower, there will be  $2mn - 3m - 3n + 4$  bars in excess of the required  $3V - 6$ . This formula yields zero for the case  $m = n = 2$  in **Figure 2**, but shows there are sure to be 12 extra bars in the partial grid in **Figure 1**, where  $m = n = 4$ .

Just a few reminders now of matters taken up in our introductory article (Crapo 1979). The equilibrium configurations of forces supportable by a structure form a linear space, the dimension of which is called the **rank**  $r$  of the structure. This rank is less than or equal to the number  $E$  of bars of the structure, and the difference  $E - r$  is called the **nullity** of the structure. The reader will recall how the count  $3V - 6$  for the number of bars in a minimally-rigid spatial structure with  $V$  nodes is derivable both from statics and from mechanics. First, a statically rigid body with  $V$  nodes in 3-dimensional space will support all equilibrium configurations of applied forces, these forming a vector space of dimension  $3V - 6$ , there being  $3V$  ways to apply forces at the nodes, and 6 conditions to be satisfied for equilibrium. Secondly, the bars are capable of eliminating all  $3V$  degrees of freedom of the nodes, save those 6 degrees of freedom of rigid motion generated by the translations and rotations of the space itself. Recall also that the term **isostatic** applies to a spatial structure which has  $3V - 6$  bars on  $V$  nodes, and is statically rigid. That is, it is minimally rigid (rigid with nullity 0). As a topological object, the graph of a structure is **generically isostatic** if there is some way of locating its nodes in space so that it becomes isostatic. In what follows, we shall show that the partial truss of **Figure 2** is generically isostatic. This means in practice that the best you can determine by counting arguments, in fact by any arguments based on properties of the graph of the structure, is that it **could be statically rigid**.

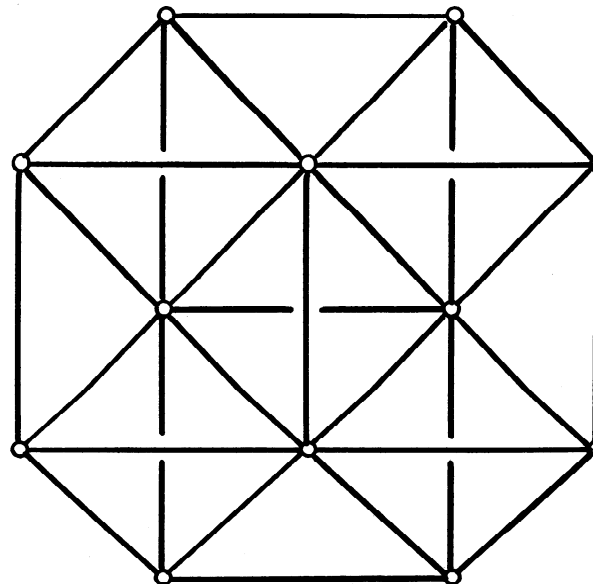


Figure 2

Le calcul  $3V - 6$  pour le réseau partiel de la **figure 2** donne uniquement une idée grossière de ses propriétés structurales, même en tenant compte des considérations topologiques. Par exemple, il pourrait y avoir un sous-ensemble adéquat contenant un certain nombre  $V'$  de ces noeuds, ayant plus de  $3V' - 6$  barres, laissant de telle sorte l'ensemble entier de  $V = 12$  noeuds insuffisamment attaché. Ou bien, il pourrait y avoir une **charnière**, cachée ou visible autrement, qui affecterait le calcul. Voyons, par exemple à la **figure 3**, où trois graphes complets sur 5 sommets chacun ont été reliés par des charnières en les rassemblant deux par deux le long d'une barre, puis en enlevant la barre, puis en répétant l'opération pour le second joint (Tay 1978). Il en résulte un mécanisme à deux degrés de liberté, comprenant 26 barres sur 11 noeuds. Puisque  $26 = 3(11) - 7$ , 26 barres peuvent en principe supprimer tous les degrés de liberté, sauf un. Les 26 barres font le travail de 25. Elles sont **dépendantes** comme contraintes linéaires sur les mouvements infinitésimaux des noeuds. Alors, l'addition d'une barre, comme on peut le voir par la ligne brisée dans la figure, ne peut pas rendre l'entière structure rigide, même si une telle addition constituait une structure avec précisément  $3V - 6$  barres sur  $V$  noeuds, et pas plus de  $3V' - 6$  sur n'importe quel autre sous-ensemble à  $V'$  noeuds. Nous devons employer une méthode adéquate pour écarter ces défauts topologiques dans la structure que nous étudions ici.

Nous raffinons l'analyse topologique du graphe du réseau partiel en faisant appel à la méthode de remplacement de Henneberg (Henneberg 1911). Nous ne nous arrêterons pas sur les raffinements de cette méthode, parce qu'elle est expliquée en détail dans un article de Whiteley (à paraître). Une opération Henneberg remplace un seul noeud d'une structure par un certain nombre de barres situées entre les noeuds restants, de telle sorte que si le graphe obtenu est génériquement isostatique, le graphe original l'était également. Une structure spatiale est génériquement isostatique si une séquence des opérations de Henneberg la réduit en un tétraèdre.

The count  $3V - 6$  for the partial truss in **Figure 2** gives only the crudest idea of its structural properties, even amongst topological considerations. There might, for instance, be some proper subset containing some number  $V'$  of those nodes, having more than  $3V' - 6$  bars, thus leaving the entire set of  $V = 12$  nodes underbraced. Or there might be what we call a **hinge**, concealed or otherwise, which would also throw the count. See for instance **Figure 3**, where three complete graphs on 5 vertices each have been hinged together in pairs by bringing two together along a bar, then removing the bar, then repeating this operation for second joint (Tay 1978). There results a mechanism with two degrees of freedom, with 26 bars on 11 nodes. Since  $26 = 3(11) - 7$ , 26 bars could in principle remove all but one degree of freedom. The 26 bars are doing the work of 25. They are **dependent** as linear constraints on infinitesimal motions of the nodes. Thus the addition of one bar, as shown by a broken line in the figure, cannot possibly render the overall structure rigid, even though such an addition would result in a structure with precisely  $3V - 6$  bars on  $V$  nodes, and no more than  $3V' - 6$  on any proper subset of  $V'$  nodes. We must use some method to rule out these topological failures in the structure under consideration.

We refine the topological analysis of the graph of the partial truss by relying on Henneberg's method of replacement (Henneberg 1911). We shall not dwell on the fine points of this method, because it is treated in detail in (Whiteley, to appear). A Henneberg operation replaces a single node of a structure by a certain number of bars between the remaining nodes, in such a way that if the resulting graph is generically isostatic, so was the original graph. A spatial structure is generically isostatic if some sequence of Henneberg operations reduces it to a tetrahedron.

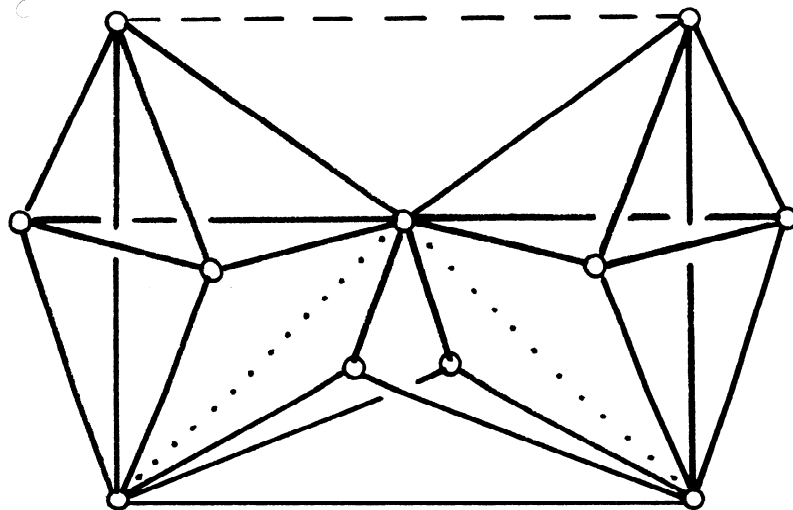


Figure 3

Un noeud arbitraire d'une structure est joint au reste de la structure le long des arêtes à ce que nous pouvons appeler les **pieds** de ce noeud. Avec cette notion en tête, nous faisons deux opérations Henneberg que nous savons valides pour les structures spatiales:

- A) Enlever tout noeud trivalent.
- B) Enlever tout noeud quadrivalent, et le remplacer par une barre qui n'est pas dans le graphe, en joignant deux des pieds de ce noeud.

Dans la **figure 4**, nous traçons une séquence des opérations Henneberg qui réduit le réseau partiel à un tétraèdre. Dès lors, le réseau partiel est génériquement isostatique. En conséquence, si ceci, ou en fait, si toute portion plus grande du réseau d'une forme à peu près rectangulaire et complétée aux frontières, est construit avec un assortiment quelconque raisonnablement irrégulier de longueurs de barres, la structure obtenue sera rigide. Il n'y a pas d'argument **topologique** qui peut justifier la torsion observée dans le modèle physique. Nous devons faire appel à la **géométrie** pour obtenir une explication.

An arbitrary node of a structure is joined to the rest of the structure along edges to what we may call the **feet** of that node. With this notion in mind, we give two Henneberg operations which we know are valid for spatial structures:

- A) Remove any 3-valent node.
- B) Remove any 4-valent node, and replace it by any bar not in the graph, connecting two of the feet of that node.

In **Figure 4** we trace a sequence of Henneberg operations which reduces the partial truss to a tetrahedron. Therefore, the partial truss is generically isostatic. As a consequence, if this, or in fact any larger portion of the truss roughly rectangular in shape and finished off at the edges, is built with any reasonably irregular assortment of lengths of bars, the resulting structure will be rigid. There is no **topological** argument that can account for the observed twisting of the physical model. We must look to **geometry** for an explanation.

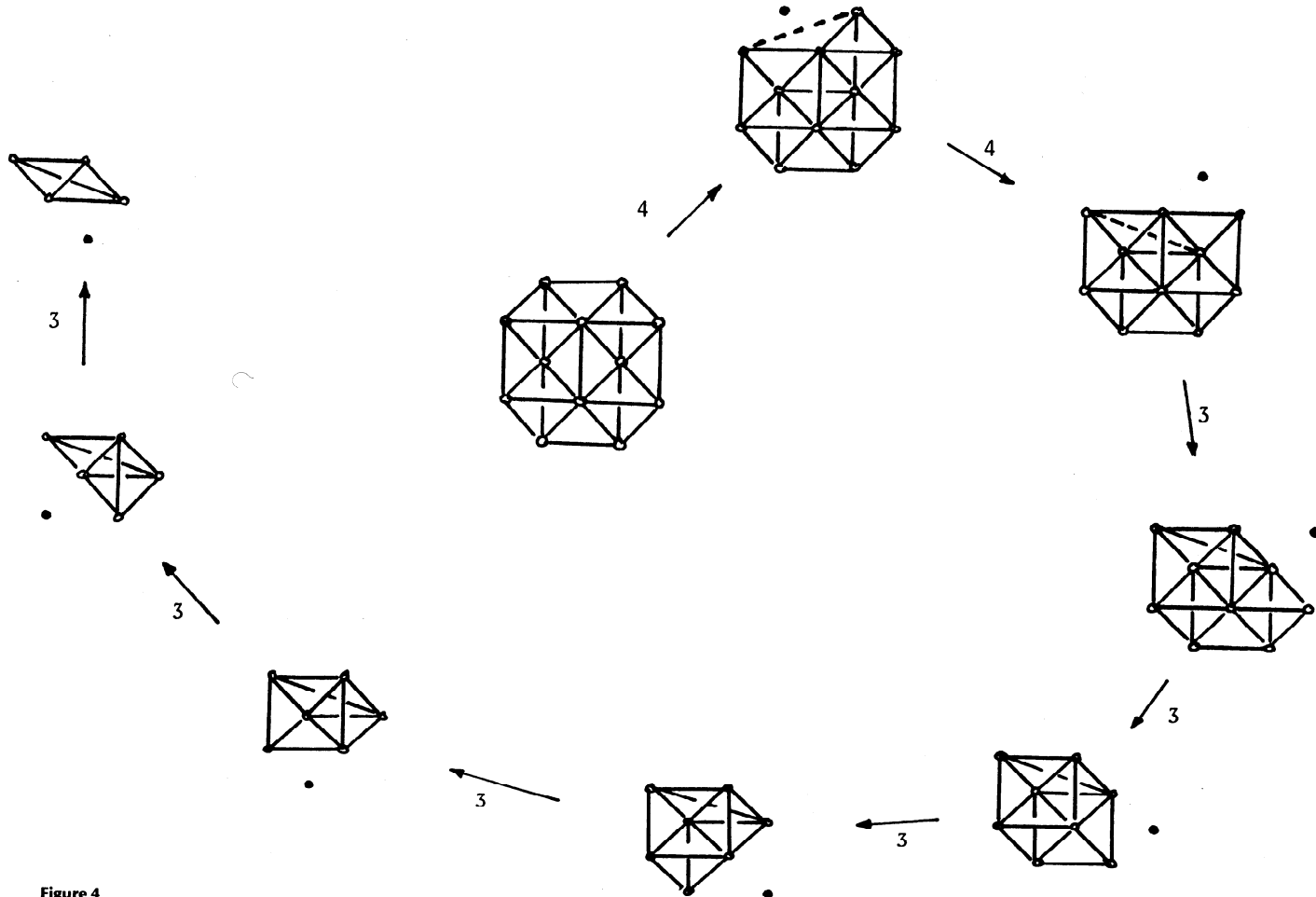


Figure 4

## The infinitesimal motion

We fix our attention on one particular spatial model of the infinitely-extended truss, consisting of a square grid in the plane  $z = 1$  with a node at  $(0, 1, 1)$ , and a square grid in the plane  $z = 0$  with a node at  $(1, 0, 0)$ , the squares in both grids having edge-length 2, braced relative to one another by space diagonals connecting all pairs of nearest nodes (**Figure 5**). To begin with, we fix the four nodes of the (rigid) tetrahedron, which we call the first ring of the structure,  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, -1, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$ . We compute a motion of the second ring, as shown in **Figure 2**. The node  $A = (2, 1, 1)$  is connected by bars to two nodes in the fixed tetrahedron, and must move with a velocity perpendicular to those bars. The bars are in directions  $(1, 1, 1)$  and  $(2, 0, 0)$ , so the velocity must be a multiple of  $(0, 1, -1)$ . The node  $B$  at  $(1, 2, 0)$  must move in a direction perpendicular to the bars in directions  $(1, -1, -1)$  and  $(0, 2, 0)$ , and must have a relative velocity  $v_B = (0, 1, -1)$  perpendicular to the bar in direction  $(-1, 1, -1)$ . Another way to put this is  $v_B \cdot (-1, 1, -1) = (0, 1, -1) \cdot (-1, 1, -1) = 2$ . Thus  $v_B = (-1, 0, -1)$ . In a similar fashion we may calculate without contradiction the velocities of nodes  $C$  through  $H$ . Note that the chosen velocity  $v_A = (0, 1, -1)$  and the computed velocity  $v_H = (0, 1, 1)$  do not change the length of the bar  $AH$ . The velocities computed are a motion of the second ring.

If we continue this computation, we find the third ring (**Figure 5**) also has a unique motion. Its nullity, which is equal to 5, shows up in the computation when the value for the velocity of a node is determined by three bars to nodes where the velocity has already been assigned, and matches that required by bars attached to further such nodes.

Extrapolation from the velocities of the nodes of the third ring leads us to formulas for the velocities of all the nodes in the infinite truss. We parametrize the nodes by, for all integers  $m, n$ ,

$(m, n)$  -- upper node  $(2m, 2n + 1, 1)$   
 -- lower node  $(2m + 1, 2n, 0)$ .

**Figure 6a** shows those values, at a typical upper and lower node. We then verify in **Figure 6b** for the eight types of bars that the relative velocity of the ends of each bar is perpendicular to the bar itself. Thus the infinite truss also has a unique infinitesimal motion.

When we study the motion of the second ring in detail, it **appears** to be approximately a rotation of four plane-rigid triangulated panels, such as  $ABCD$ , relative to one another and relative to the fixed tetrahedron. The four triangulated panels are attached to the tetrahedron at one node each, and are hinged into a cycle, at hinges  $AB, CD$ , etc. Are these panels left flat by the infinitesimal motion? To find out, we compute the three vectors from node  $C$  to  $B$ , from  $C$  to  $A$ , and from  $C$  to the tetrahedron, when the nodes are in their original position plus a parameter  $t$  times the motion. These vectors:

$$(2, 0, -2t), (3 + t, 1 - t, 1 - 2t), (1 + t, -1, 1 - t)$$

possèdent un déterminant  $-2t(t^2 + 2)$  avec un terme linéaire qui n'est pas zéro, de

## The infinitesimal motion

We fix our attention on one particular spatial model of the infinitely-extended truss, consisting of a square grid in the plane  $z = 1$  with a node at  $(0, 1, 1)$ , and a square grid in the plane  $z = 0$  with a node at  $(1, 0, 0)$ , the squares in both grids having edge-length 2, braced relative to one another by space diagonals connecting all pairs of nearest nodes (**Figure 5**). To begin with, we fix the four nodes of the (rigid) tetrahedron, which we call the first ring of the structure,  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, -1, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$ . We compute a motion of the second ring, as shown in **Figure 2**. The node  $A = (2, 1, 1)$  is connected by bars to two nodes in the fixed tetrahedron, and must move with a velocity perpendicular to those bars. The bars are in directions  $(1, 1, 1)$  and  $(2, 0, 0)$ , so the velocity must be a multiple of  $(0, 1, -1)$ . The node  $B$  at  $(1, 2, 0)$  must move in a direction perpendicular to the bars in directions  $(1, -1, -1)$  and  $(0, 2, 0)$ , and must have a relative velocity  $v_B = (0, 1, -1)$  perpendicular to the bar in direction  $(-1, 1, -1)$ . Another way to put this is  $v_B \cdot (-1, 1, -1) = (0, 1, -1) \cdot (-1, 1, -1) = 2$ . Thus  $v_B = (-1, 0, -1)$ . In a similar fashion we may calculate without contradiction the velocities of nodes  $C$  through  $H$ . Note that the chosen velocity  $v_A = (0, 1, -1)$  and the computed velocity  $v_H = (0, 1, 1)$  do not change the length of the bar  $AH$ . The velocities computed are a motion of the second ring.

If we continue this computation, we find the third ring (**Figure 5**) also has a unique motion. Its nullity, which is equal to 5, shows up in the computation when the value for the velocity of a node is determined by three bars to nodes where the velocity has already been assigned, and matches that required by bars attached to further such nodes.

Extrapolation from the velocities of the nodes of the third ring leads us to formulas for the velocities of all the nodes in the infinite truss. We parametrize the nodes by, for all integers  $m, n$ ,

$(m, n)$  -- upper node  $(2m, 2n + 1, 1)$   
 -- lower node  $(2m + 1, 2n, 0)$ .

**Figure 6a** shows those values, at a typical upper and lower node. We then verify in **Figure 6b** for the eight types of bars that the relative velocity of the ends of each bar is perpendicular to the bar itself. Thus the infinite truss also has a unique infinitesimal motion.

When we study the motion of the second ring in detail, it **appears** to be approximately a rotation of four plane-rigid triangulated panels, such as  $ABCD$ , relative to one another and relative to the fixed tetrahedron. The four triangulated panels are attached to the tetrahedron at one node each, and are hinged into a cycle, at hinges  $AB, CD$ , etc. Are these panels left flat by the infinitesimal motion? To find out, we compute the three vectors from node  $C$  to  $B$ , from  $C$  to  $A$ , and from  $C$  to the tetrahedron, when the nodes are in their original position plus a parameter  $t$  times the motion. These vectors:

$$(2, 0, -2t), (3 + t, 1 - t, 1 - 2t), (1 + t, -1, 1 - t)$$

have determinant  $-2t(t^2 + 2)$  with a nonzero linear term, so the triangulated panel is

telle sorte que le panneau triangulaire plie de façon infinitésimale le long de la barre à partir du noeud fixe jusqu'à B.

infinitesimally bending along the bar from the fixed node to B.

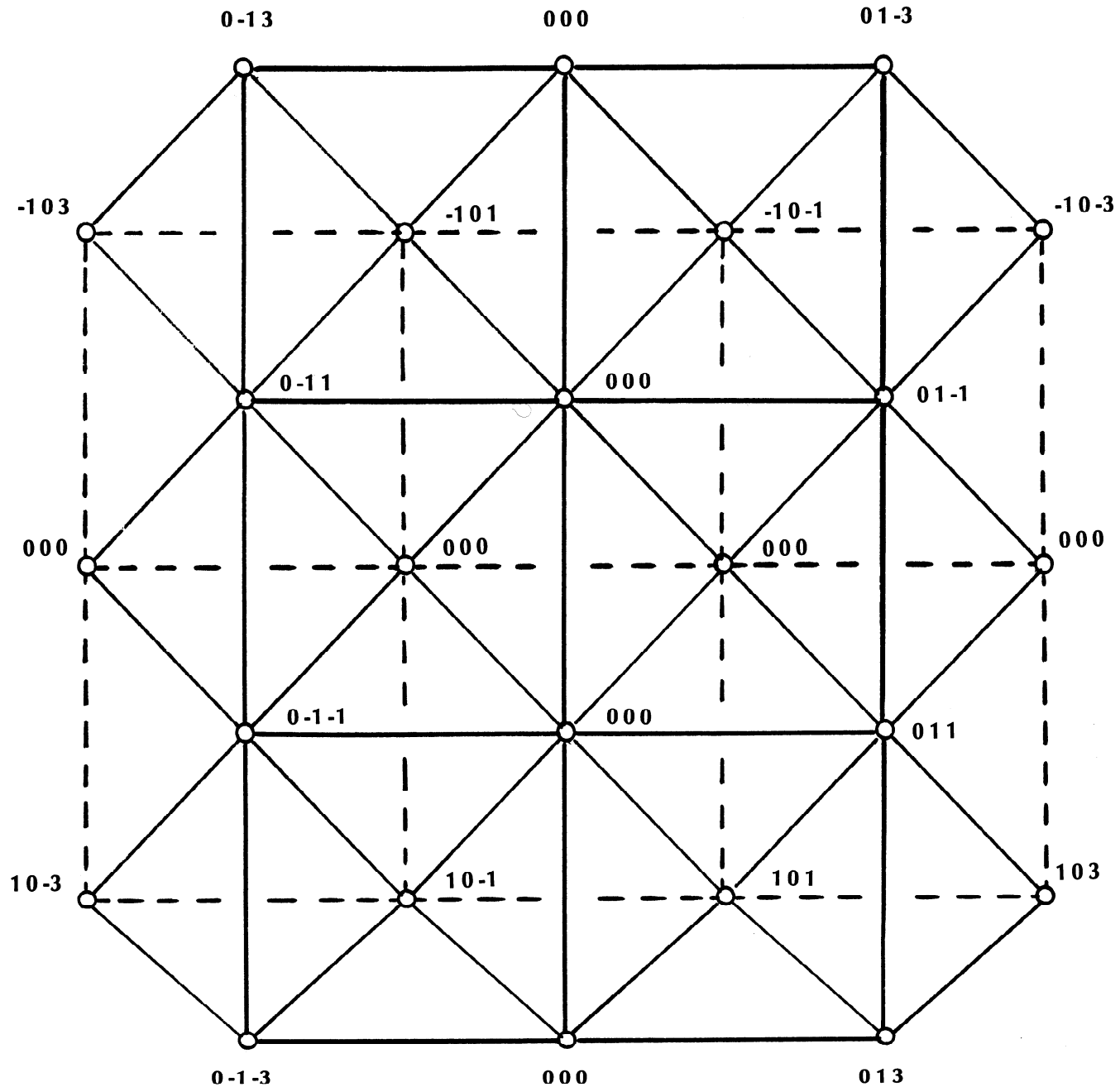


Figure 5. The third ring. 70 bars in rank  $65 = 3(24) - 7$ , with one internal degree of freedom. The velocities of nodes are shown for that motion.

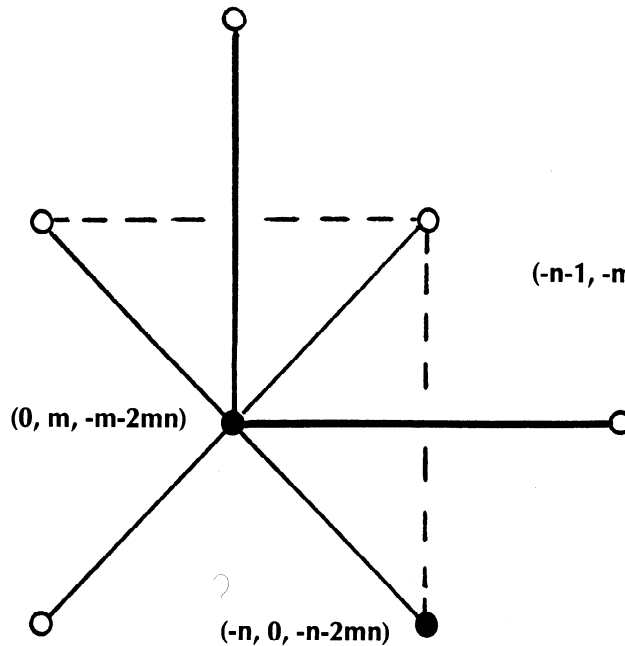
Velocity  $v$ 

Figure 6a

For index values  $(m, n)$ :

Black upper node at  $(2m, 2n + 1, 1)$

Black lower node at  $(2m + 1, 2n, 0)$

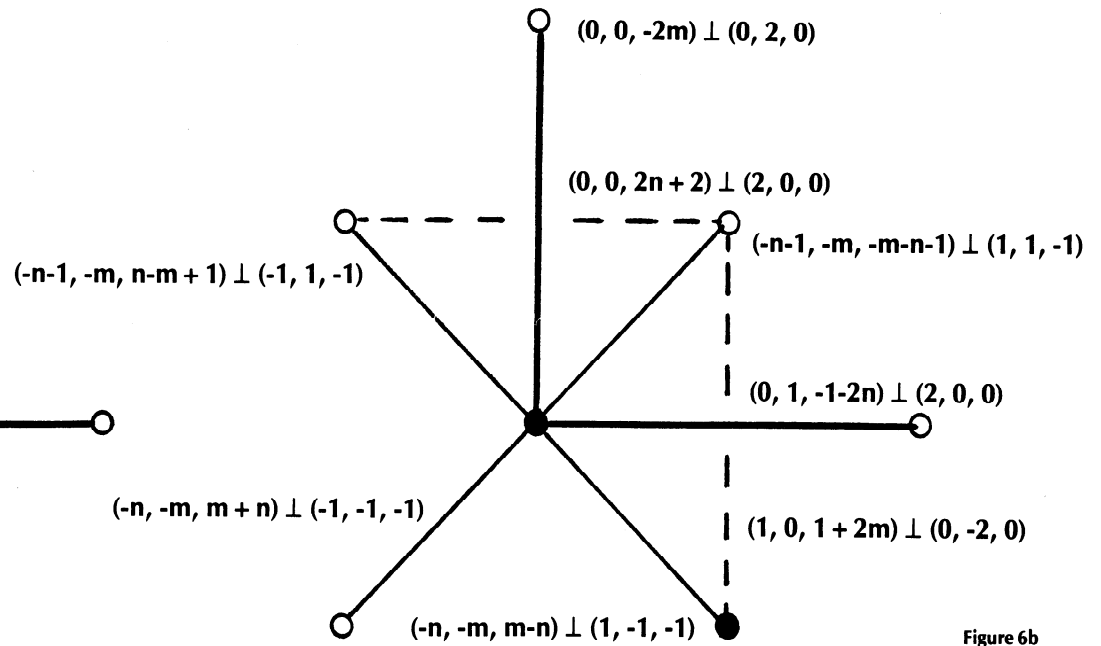
Relative velocity  $\Delta v$ 

Figure 6b

Relative velocity  $\perp$  relative position in each instance.

## Quelles barres sont impliquées dans la dépendance?

Finalement, nous devrions découvrir si cette structure est un ensemble minimal dépendant (un circuit) ou simplement un ensemble dépendant de 30 barres. Premièrement, nous savons que comme le mouvement est unique jusqu'à un scalaire près, 29 des 30 degrés internes de liberté des 12 noeuds ont été enlevés, de telle sorte que la structure possède le rang 29, nullité 1. La dépendance unique impliquera un **sous-ensemble spécifique** de l'ensemble de 30 barres, et sera unique jusqu'à un scalaire près. Toutes les autres barres (s'il y en a) seront **indépendantes** dans la structure et si on les enlève, chacune introduira un degré de liberté supplémentaire.

Toute dépendance dans une structure répond à un système de forces de tension et de compression dans les barres, un système qui est en équilibre à chaque noeud. Ce système de forces dans une **contrainte interne**, tel qu'il se présente dans une poutre pré-contrainte (en ne tenant pas compte de la gravité). Maintenant, si toutes les barres, sauf une, à un noeud donné d'une structure, sont coplanaires, une force le long de cette seule barre ne peut pas être égalée par les forces dans les autres barres coplanaires. Alors, nous pouvons en conclure qu'une telle barre ne peut pas être impliquée dans une quelconque dépendance parmi les barres de cette structure.

## What bars are involved in the dependence?

Finally, we should find out whether this structure is a minimal dependent set (a **circuit**), or merely a dependent set of 30 bars. First off, we know that since the motion is unique up to a scalar, 29 of the 30 internal degrees of freedom of the 12 nodes have been removed, so the structure has rank 29, nullity 1. The single dependence will involve **one specific subset** of the set of 30 bars, and will be unique up to a scalar. Any other bars (if any) will be **independent** in the structure, and if removed will each introduce an extra degree of freedom.

Any dependence in a structure corresponds to a system of tension and compression forces in the bars, a system in equilibrium at every node. This system of forces in an **internal stress**, such as that present in a prestressed beam (gravity neglected). Now, if all but one of the bars at any given node of a structure are coplanar, a force along that single bar cannot be equalized by forces in the other coplanar bars. Thus we may conclude that such a bar cannot be involved in any dependence among the bars of that structure.



C'est précisément ce qui arrive sur n'importe quel autre noeud de la grille partielle dans la **figure 2**, tel qu'on le voit au noeud A. Trois barres sont coplanaires et la quatrième barre ne peut pas être impliquée dans la dépendance. Conséquemment, la dépendance doit en fait être limitée aux 22 barres représentées à la **figure 7** et voilà le **circuit**. Une tension (+1) dans la barre AB peut seulement être équilibrée par une tension d'unité (+1) dans la barre AH et une compression d'unité (-1) dans la barre AW. La tension +1 dans AH suppose une tension (+1) dans HG et une compression (-1) dans HW. De cette manière, nous déterminons les contraintes dans toutes les barres à l'extérieur du tétraèdre central. Maintenant, au noeud Y, nous avons une force totale

$$-DY - EY = (-2, 0, 2)$$

exercée par les deux barres sur le bord externe, une force qui ne peut être équilibrée que par les tensions (+1) dans les barres YZ et YX et une compression (-2) dans la barre YW. De la même façon, Z est aussi en compression (-2). Par exemple, l'équilibre au noeud Y est

$$-1(1,-1,-1) - 1(1,1,-1) + 1(-1,-1,-1) + 1(-1,1,-1) - 2(-2,0,0) = (0,0,0).$$

La dépendance (ou contrainte) peut être multipliée par un nombre négatif, de telle sorte que les membres de compression sont remplacés par des membres de tension, et inversement. Cette autre division possible entre la tension et la compression est illustrée à la **figure 7b**.

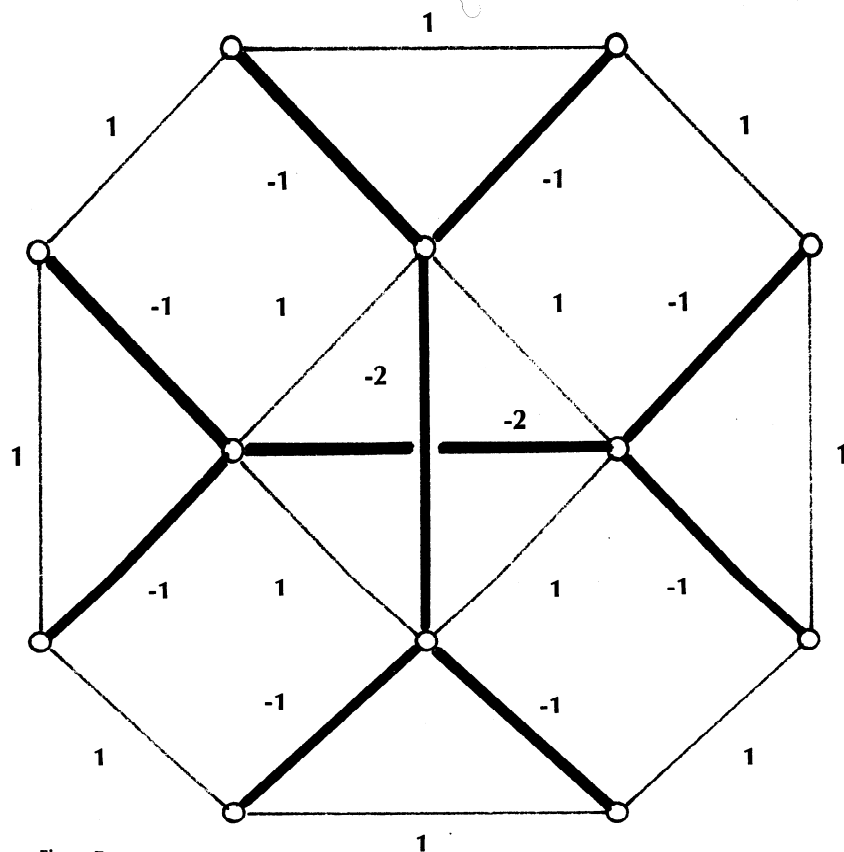


Figure 7a

But this is precisely what happens at any other node of the partial grid in **Figure 2**, such as at the node A. Three bars are coplanar, and the fourth bar cannot be involved in the dependence. Consequently, the dependence must in fact be limited to the 22 bars shown in **Figure 7**, and this is the **circuit**. A tension (+1) in the bar AB can only be balanced by a unit tension (+1) in the bar AH and a unit compression (-1) in the bar AW. The tension +1 in AH implies a tension (+1) in HG and compression (-1) in HW. In this way we determine the stresses in all bars outside the central tetrahedron. Now, at the node Y, we have a total force  $-DY - EY = (-2, 0, 2)$  exerted by the two bars to the outer rim, a force which can only be balanced by tensions (+1) in the bars YX and YZ and a compression (-2) in the bar YW. Similarly, XZ is also in compression (-2). For instance, the equilibrium at node Y is:

$$-1(1,-1,-1) - 1(1,1,-1) + 1(-1,-1,-1) + 1(-1,1,-1) - 2(-2,0,0) = (0,0,0).$$

The dependence (or stress) can be multiplied throughout by a negative number, so that compression members are replaced by tension members, and conversely. This other possible split between tension and compression is illustrated in **Figure 7b**.

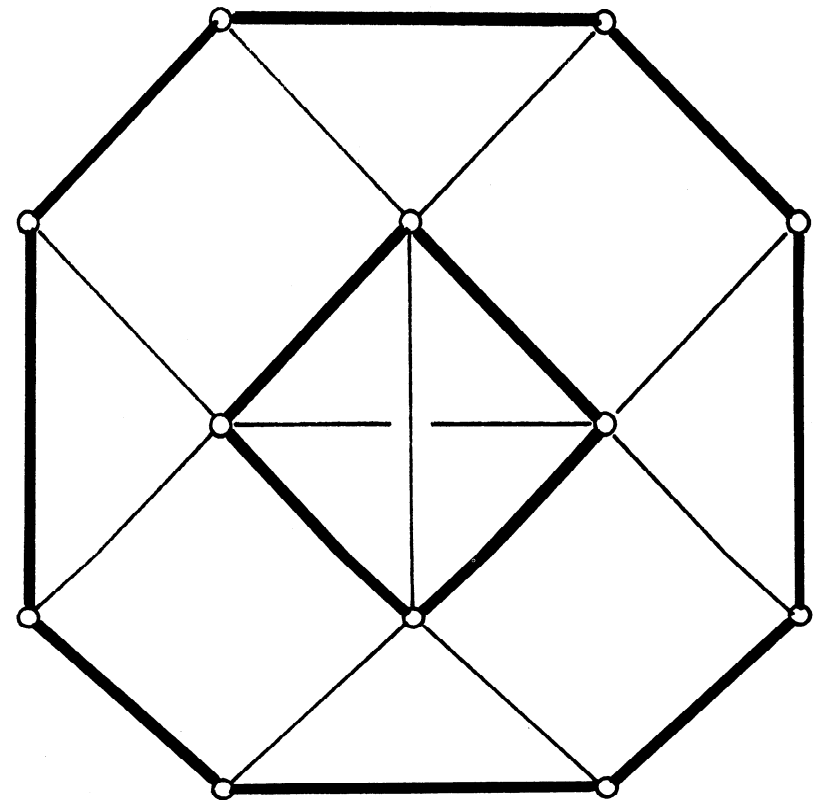


Figure 7b

# Problèmes non-résolus

Comme d'habitude, une telle recherche soulève plus de questions qu'elle n'en résout. Nous savons que le réseau partiel de la **figure 2** est indépendant  $3V - 6$  (donc rigide) dans une position générale de l'espace tri-dimensionnel projectif, et nous supposons qu'il y a **une condition projective** sur l'emplacement des noeuds, condition nécessaire et suffisante pour que la structure à 30 barres soit dépendante.

Problème 1. Quelle est la condition projective pour obtenir la dépendance du réseau partiel?

Problème 2. Quelles conditions projectives additionnelles nous garantiraient que la sous-structure de la **figure 7** est dépendante? (Nous supposons qu'il y a 8 conditions additionnelles, ou tout au plus 9 conditions).

Problème 3. Est-ce qu'une des structures ci-dessus tombe dans une classe reconnaissable de structure conditionnellement dépendante?

Problème 4. Est-il possible de prédire la dépendance de la **figure 7** par un échange de circuits, en commençant par les circuits qui sont le plus facilement reconnaissables?

Toutes ces questions originent d'un programme global d'identification de toutes les structures qui sont dépendantes (ou toutes celles qui sont isostatiques) dans l'espace tri-dimensionnel, un programme que nous espérons compléter avec la collaboration de plusieurs lecteurs de **Topologie Structurale** et dont nous traiterons dans les numéros à venir.

# Open Problems

As usual, a study of this sort raises more questions than it settles. We know that the partial truss in **Figure 2** is independent  $3V - 6$  (thus rigid) in general position in projective 3-space, and we expect there is **one projective condition** on the location of the nodes, necessary and sufficient for the 30-bar structure to be dependent.

Problem 1. What is the projective condition for dependence of the partial truss?

Problem 2. What further projective conditions will guarantee that the substructure in **Figure 7** is dependent? (We expect 8 further conditions, or 9 conditions in all.)

Problem 3. Do either of the above structures fall into some recognizable class of conditionally dependent structures?

Problem 4. Can the dependence in **Figure 7** be predicted by circuit exchange, starting from circuits which are more readily recognizable?

All these questions evolve from an overall programme of determining all structures which are dependent (or all which are isostatic) in three-dimensional space, a programme to be implemented hopefully with the collaboration of many readers of **Structural Topology**, and to be reported in future issues.

<p><b>Crapo 1979</b> Henry Crapo  A—AME—R</p>	<p><b>Structural Rigidity</b>  Structural Topology 1 (1979), 26-45.</p>	<p>Topological and projective geometric reasons for dependence of structural members. General introduction to static rigidity, infinitesimal motions and internal stress ● Des raisons topologique et géométrique pour la dépendance des structures. Une introduction à la rigidité statique, les mouvements infinitésimaux et contraintes.</p>
<p><b>Henneberg 1886</b> L. Henneberg  B—E—R</p>	<p><b>Statik der Starren Systeme</b>  Bergstrasser, Darmstadt, Germany, 1875</p>	<p>Graphical statics, static equivalence of structures, substitution of bars ● La statique graphique, l'équivalence statique des structures, et la substitution des barres.</p>
<p><b>Tay 1978</b> Tiong Seng Tay  P—M—R</p>	<p>as reported in: <b>Spatial Structures in General Position</b>  Compte rendu, Groupe de Recherche «Topologie Structurale», 1 October 1978.</p>	<p>The role of hinges in creating dependencies within spatial structures in general position ● La rôle des charnières dans la création des dépendances dans des réseaux spatiaux en position générale.</p>
<p><b>Whiteley 1982</b> Walter Whiteley  A—AME—R</p>	<p><b>Motions of Trusses and Bipartite Frameworks</b>  Structural Topology 7 (1982), 61-66.</p>	<p>The sequel to this article ● La suite de cet article.</p>