

Michael Yanoff

Informational Graphics Consultant
P.O. Box 25452
Chicago, Illinois 60625
USA

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

Singled-sided Möbius Modules

Abstract

The möbius strip is simple to construct and yet embodies a sophisticated mathematical concept which forces us to reconsider the way we think about surfaces because the möbius strip has no distinct front and back. It has only a single side. Like much in mathematics the ideas relating to the möbius strip can be extended. The Klein bottle is one example of such an extension concerning the fourth dimension.

This article presents another example which is quite different from the Klein bottle. Here modular systems are introduced in which each module like the möbius strip is single-sided. Yet, as one would expect from modular systems, these can all be extended to span any given volume of three dimensional space. The individual modules are constructed from simple square tiles.

While these systems are intriguing in themselves, they could possibly present challenging ideas for mathematical inquiry or offer innovative structures for technological uses in fields like computer design and chemical engineering. ■

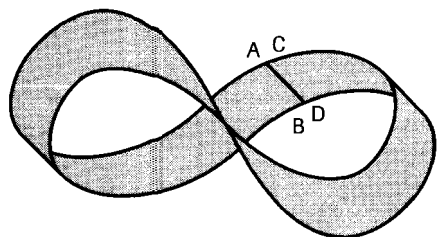
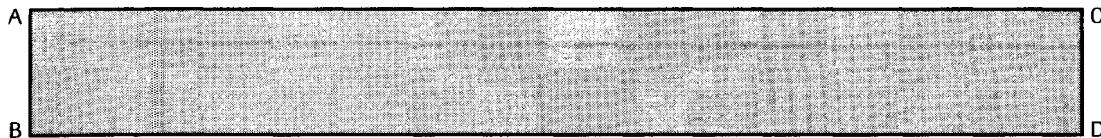
Module de Möbius unilatères

Résumé

Le ruban de Möbius est simple à construire ; pourtant il concrétise un concept mathématique sophistiqué qui nous oblige à reconsidérer notre conception des surfaces, car le ruban de Möbius n'a ni devant ni derrière. Il ne possède qu'un seul côté. Comme beaucoup de concepts en mathématiques, les idées relevant du ruban de Möbius peuvent être étendues. La bouteille de Klein est un exemple d'une telle extension dans la quatrième dimension.

Cet article présente un autre exemple tout à fait différent de la bouteille de Klein. On présente ici des systèmes modulaires dans lesquels chaque module ne possède, comme le ruban de Möbius, qu'un seul côté. Pourtant, comme on pourrait s'attendre de systèmes modulaires, ceux-ci peuvent tous être déployés pour englober n'importe quel volume de l'espace tridimensionnel. Les modules individuels sont construits à partir de simples tuiles carrées.

Quoiqu'intrigants en eux-mêmes, ces systèmes peuvent éventuellement se présenter comme éléments stimulants de

**Figure 1**

Traditional realization of möbius strip.

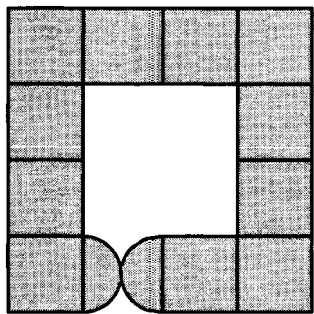
1a Flat band of paper for making möbius strip.

1b Assembled möbius strip.

Réalisation traditionnelle d'un ruban de Möbius.

1a Bande de papier plane pour construire un ruban de Möbius.

1b Ruban de Möbius assemblé.

**Figure 2**

Möbius strip in which twist is confined to one tile.

Ruban de Möbius dans lequel la torsion est confinée à une seule tuile.

Introduction

The möbius strip challenges the way we normally conceive of surfaces. It has but a single side bounded by a single edge. The consequences of single-sidedness can be appreciated through an example pertaining to computer electronics. If a circuit board were a möbius strip then any two of its electronic components regardless of location could be connected by a circuit without that circuit leaving the board's surface, without ever feeding it through a hole and without wrapping it around the board's edge. This would be possible because all electronic components would be on the same side of the circuit board.

This article introduces a significant departure from the usual conception of single-sidedness. Typical realizations of möbius strips depict them as isolated models, whereas the structures which will be described here are composed of modules which can be connected together to span any volume of three dimensional space in a periodic manner. Yet, each module individually has the property of single-sidedness. The manifold repetition of this single-sidedness insures a relatively short route to be found from any location on the surface of such a structure to the corresponding location on what would be normally considered the "opposite side", without having to go around an edge.

Construction constraints

In the traditional realization of the möbius strip, a narrow band of paper is twisted 180° about its longer dimension before its two shorter edges are joined. A first band and an assembled möbius strip are both illustrated in **Figure 1**. As can be seen in the illustration, the result of this type of twisting is a curvilinear surface which does not facilitate the creation of systematic intermodular connections.

The first step towards modular construction is to establish a basic building unit which, here, will be a square tile. We can then make a tiled möbius strip by constructing a square band from several square tiles having one of them twisted 180° before it is assembled with the rest which all remain flat.

la recherche mathématique ou offrir des idées de structures innovatrices pour des utilisations technologiques dans des champs comme l'architecture des ordinateurs et le génie chimique. .ii.

Introduction

Le ruban de Möbius défie notre façon habituelle de concevoir les surfaces. Il ne possède qu'un seul côté borné par une seule arête. On peut apprécier les conséquences de l'unilatéralité à l'aide d'un exemple se rapportant à l'électronique de l'ordinateur. Si une carte de circuits était un ruban de Möbius alors n'importe quelle paire de ses composants électroniques, peu importe leur emplacement, pourrait être connectée par un circuit sans que ce circuit ne quitte la surface de la carte, sans qu'on n'ait à le faire passer par un trou et sans qu'il ne croise l'arête de la carte. Cela serait possible car toutes les composantes électroniques se situeraient sur le même côté de la carte de circuits.

Cet article présente une nouvelle orientation par rapport à la conception habituelle de l'unilatéralité. Les réalisations typiques de rubans de Möbius se dépeignent comme des modèles isolés, tandis que les structures qui seront décrites ici sont composées de modules qui peuvent être liés entre eux pour englober n'importe quel volume de l'espace tridimensionnel de façon périodique. Cependant, chaque module possède individuellement la propriété d'unilatéralité. La répétition multiple de cette unilatéralité assure qu'on puisse trouver un chemin relativement court entre un quelconque emplacement sur la surface d'une telle structure à l'emplacement correspondant sur ce qu'on considérerait normalement comme le «côté opposé», sans avoir à franchir une arête.

Contraintes de construction

Dans la réalisation traditionnelle du ruban de Möbius, on imprime à une étroite bande de papier une rotation de 180° selon son axe le plus grand avant de joindre ses deux plus petites arêtes. L'illustration de la **figure 1** présente une bande plane et un ruban de Möbius assemblé. Comme on peut l'observer dans l'illustration, le résultat de ce type de torsion est une surface curvilinéaire qui ne simplifie pas la création de connections intermodulaires systématiques.

La première étape vers une construction modulaire est l'établissement d'une unité de base de construction qui, ici, sera une tuile carrée. On peut alors faire un ruban de Möbius

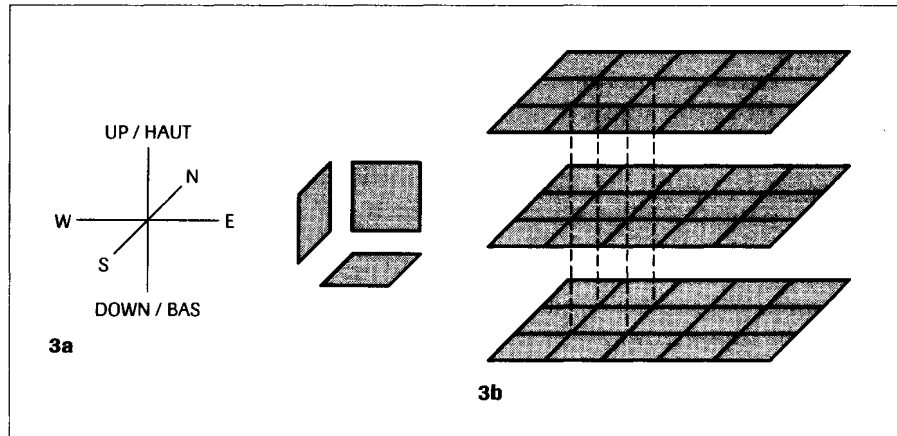


Figure 3

Some results from applying the 5 construction constraints.

3a A tile may assume only one of three orientations. Tile edges may only be coincidental or meet orthogonally, if they intersect.

3b Corresponding tiles in consecutive parallel layers align into square columns. Dash lines indicate one such column. Corresponding sides of corresponding tiles align like rungs of a ladder.

Certains résultats de l'application des cinq contraintes de construction.

3a Une tuile ne possède qu'une seule des trois orientations. Les arêtes des tuiles ne peuvent que coïncider ou se rencontrer de façon orthogonale si elles ont une intersection.

3b Les tuiles correspondantes dans des couches parallèles consécutives s'alignent en colonnes carrées. Les lignes pointillées indiquent une telle colonne. Les côtés correspondant de tuiles correspondantes s'alignent comme les échelons d'une échelle.

Figure 2 shows the result of such a tiling which all Möbius strips is single-sided.

The square-band version of the Möbius strip is useful in helping us understand how tiles can be used in making single-sided structures, but it would be beneficial to eliminate the twisted element, firstly, in order to further aid development of a modular system and, secondly, for the practical reason that it is easier to fabricate models by keeping all basic building units flat. In fact, beyond eliminating twisted tiles, inter-tile angles of connection can be limited to multiples of 90° and this restriction will simplify the task of conceiving and creating modular components. For these reasons the following five construction constraints are employed:

- 1) Basic building units are flat square tiles.
- 2) Only one tile may be connected to any one edge of another tile, but it is permissible to leave a tile edge unconnected (or **vacant**).
- 3) The angular measurement between two adjacent faces of directly connected unit tiles can only be 90° , 180° or 270° . The angle measured between two adjacent faces of directly connected is a **dihedral angle**.
- 4) Tile edges of basic building units may only meet in one of the same three above mentioned angles or else they must be coincidental.
- 5) If two tiles are positioned parallel (**parallel** is taken in the usual Euclidean sense) to each other and if it is possible to connect them with a line perpendicular to both, then the tiles must align in a column whose perpendicular cross section is exactly the square shape of a single tile.

carrelé par la construction d'une bande carrée à partir de plusieurs tuiles carrées dont l'une a subi une torsion de 180° avant d'être assemblée aux autres tuiles qui, elles, demeurent planes. On montre, à la **figure 2**, le résultat d'un tel carrelage qui, comme tous les rubans de Möbius, est unilatère.

La version carrelée du ruban de Möbius est utile pour nous aider à comprendre comment les tuiles peuvent être utilisées pour faire des structures unilatères, mais il pourrait être avantageux d'éliminer l'élément tordu, premièrement, pour favoriser le développement d'un système modulaire et, deuxièmement, pour la raison technique de simplification de la fabrication de modèles en conservant planes toutes les unités de construction de base. En fait, au-delà de l'élimination des tuiles tordues, l'angle de jonction entre les tuiles peut être limité à des multiples de 90° et cette restriction simplifiera la tâche de conception et de création de composants modulaires. C'est pour ces raisons qu'on emploiera les cinq contraintes de construction suivantes :

- 1) Les unités de construction de base sont des tuiles carrées planes.
- 2) Une seule tuile peut être jointe à une quelconque arête d'une autre tuile, mais il est permis de laisser une arête de tuile sans jonction (ou **vacante**).
- 3) La mesure angulaire entre deux faces adjacentes de tuiles directement jointes ne peut être que 90° , 180° ou 270° . L'angle mesuré entre deux faces adjacentes de tuiles directement jointes est un **angle dièdre**.
- 4) Les arêtes d'une tuile d'une unité de construction de base ne peuvent se rencontrer que selon l'un ou l'autre des angles mentionnés plus haut ou sinon elles doivent coïncider.
- 5) Si deux tuiles sont placées de façon parallèle (**parallèle** est considéré selon le sens euclidien habituel) l'une à l'autre et s'il est possible de les joindre par une droite perpendiculaire aux deux, les tuiles doivent alors être alignées en une colonne dont la coupe transversale perpendiculaire a exactement la forme carrée d'une simple tuile.

La **figure 3a** illustre les restrictions sur l'orientation. On les met ici en rapport avec des termes géographiques : il existe une orientation horizontale qui fait en sorte que la face d'une tuile peut être orientée vers le haut ou vers le bas, et deux orientations verticales qui font en sorte que la face d'une tuile est orientée selon les directions nord/sud ou est/ouest.

Figure 3a illustrates the restrictions on orientation. Here it is related to geographic terms: there is one horizontal orientation which results in a tile's face facing up or down, and two vertical orientations which result in a tile's faces facing in one of either pair of opposing directions of north/south or east/west.

Connected tiles form a **layer** if the only dihedral angle of inter-tile connection is 180° . The tiles of a layer can at the same time be part of a larger collection of connected tiles that includes more than the layer as well as other layers.

Two parallel layers are said to be **consecutive** if they are separated by a perpendicular distance the length of one tile edge (see **Figure 3b**).

If a mutually perpendicular line meets the interior of two parallel layers we say that the layers **overlap**. When one views a series of overlapping parallel layers he sees tiles neatly aligned into square columns. In each of any two parallel layers, two tiles that so align are said to be **corresponding**. Just as corresponding tiles neatly align, so do their edges but like the rungs of a simple straight ladder. Two edges each from one of two corresponding tiles which align are referred to as **corresponding edges**.

Finally, two faces each from one of two tiles in the same layer or parallel layers have **like orientation** if they face in the same direction while two faces each from one of two tiles in the same layer or parallel layers have **opposing orientations** if they face in opposite directions; the two faces of the same tile have opposing orientations. In a similar fashion the terms opposing orientations and like orientations also apply to multiple-tile sections and entire surfaces of parallel layers.

Although completed tiles structures with which we are dealing have only one face, we can still unambiguously refer to "two opposite sides" relative to an individual tile or layer by considering it independently of the complete structure from which it comes.

System for constructing a single-sided tile structure

Having established construction restraints, we can now proceed to make a single-sided surface from flat square tiles alone. To do this, the required angular rotation associated with a twisted element will be achieved by distributing the rotation among some of the inter-tile connections. Routes between any two locations on these single-sided surfaces can take us from tile to tile without travelling all the way around

Des tuiles jointes forment une **couche** si le seul dièdre de jonction inter-tuile est 180° . Les tuiles d'une couche peuvent en même temps appartenir à un ensemble plus vaste de tuiles jointes qui inclut la couche en question aussi bien que d'autres couches.

Deux couches parallèles sont dites **consécutives** si elles sont séparées par une distance perpendiculaire égale à la longueur de l'arête d'une tuile (voir **figure 3b**).

Si une droite rencontre l'intérieur de deux couches parallèles tout en leur étant mutuellement perpendiculaire, on dira que les couches se **chevauchent**. Lorsqu'on observe une série de couches parallèles se chevauchant, on voit des tuiles proprement alignées en colonnes carrées. Dans chaque paire de couches parallèles, deux tuiles ainsi alignées sont dites **correspondantes**. Comme les tuiles correspondantes s'alignent proprement, il en est ainsi de leurs arêtes mais à la façon des échelons d'une simple échelle droite. On appellera **arêtes correspondantes** deux arêtes s'alignant appartenant à deux différentes tuiles correspondantes.

Enfin, deux faces appartenant à deux tuiles distinctes dans la même couche ou dans des couches parallèles ont **même orientation** si elles sont orientées selon la même direction. Deux faces appartenant à deux tuiles distinctes dans la même couche ou dans des couches parallèles ont des **orientations opposées** si elles sont orientées selon des directions opposées; les deux faces d'une même tuile ont des orientations opposées. D'une manière similaire, les termes « orientations opposées » et « même orientation » s'appliquent également à des sections de multiples tuiles et aux surfaces entières de couches parallèles.

Quoique les structures complètes de tuiles dont on traite ne possèdent qu'une seule face, on peut encore faire référence sans ambiguïté aux « deux côtés opposés » relativement à une tuile ou une couche particulière en la considérant indépendamment de la structure complète dont elle est issue.

Système de construction d'une structure unilatère de tuiles

Après avoir établi les restrictions de construction, on peut maintenant procéder à la fabrication d'une surface unilatère en n'utilisant que des tuiles carrées planes. Pour ce faire, on créera la rotation angulaire requise associée à un élément tordu en distribuant la rotation parmi certaines des jonctions inter-tuiles. Les chemins entre deux emplacements

the edge of a single tile. The specific procedure for achieving this involves utilization of two types of linkage between consecutive layers of tiles.

One type of linkage creates connections between faces of like orientation and the other type of linkage creates connections between faces of opposing orientation. Methods for creating each type of linkage are outlined below. It should be kept in mind that these are but two of a number of possibilities. These two methods, involving only consecutive layers (as represented in **Figure 3b**), were chosen because they are straightforward.

To link two faces of two consecutive parallel layers and of opposing orientation, one must first either create or locate a situation where each of two corresponding tiles (one in each of the consecutive parallel layers) have corresponding **vacant** edges (edges not connected to another tile). Such an edge can either be on the outer perimeter of a layer or bordering a hole in the layer's interior. Since the consecutive layers are separated by a distance of only one tile edge, a single tile can be placed between and connected to each of the two corresponding vacant edges. This newly introduced tile then serves as a bridge for a route from either face of one of the consecutive layers to the opposite face of the other consecutive layer. In **Figure 4a** this type of link is depicted as well as a route from location P on the bottom of the lower layer to location Q on the top of the upper layer. Note that in all of **Figure 4**, tiles serving as links are represented as oblongs for illustrative purposes only. While oblong tiles would function in such a situation, square tiles are preferable

quelconques sur ces surfaces unilatérales peuvent se faire de tuile en tuile sans jamais croiser l'arête d'une simple tuile. La procédure spécifique amenant cette réalisation implique l'utilisation de deux types de liens entre les couches consécutives de tuiles.

Un premier type de lien crée des jonctions entre des faces de même orientation et l'autre type de lien crée des jonctions entre des faces d'orientations opposées. On décrit ci-dessous les méthodes respectives pour réaliser chaque type de lien. On ne doit pas oublier qu'il ne s'agit que de deux possibilités parmi un grand nombre. On a choisi ces deux méthodes, n'impliquant que des couches consécutives (telles que représentées à la **figure 3b**), car elles sont directes.

Pour lier deux faces appartenant à deux couches parallèles consécutives d'orientations opposées, on doit d'abord créer ou repérer un emplacement où chacune de deux tuiles correspondantes (une dans chacune des couches parallèles consécutives) possèdent des arêtes correspondantes **vacantes** (des arêtes non jointes à une autre tuile). Une telle tuile peut soit se situer sur le périmètre extérieur d'une couche ou être à la frontière d'un trou à l'intérieur d'une couche. Puisque les couches consécutives sont séparées par une distance équivalente à une arête de tuile, une seule tuile peut être placée entre les deux couches et se joindre à chacune des deux arêtes correspondantes vacantes. Cette nouvelle tuile sert alors de pont pour un chemin qui irait de n'importe quelle face de l'une des couches consécutives vers la face opposée de l'autre couche consecutive. La **figure 4a** illustre ce type de lien de même qu'un chemin du lieu P sur le dessous de la couche

Figure 4

Creating linkage between faces of consecutive parallel layers. Dash lines represent distances covered on surface facing away from viewer.

4a Linking faces of opposing orientation.

4b Linking faces of like orientation.

4c Establishing single-sidedness by linking faces of both opposing and like orientations.

Création de liens entre les faces de couches parallèles consécutives. Les lignes pointillées représentent les distances parcourues sur les surfaces qui ne sont pas à la vue de l'observateur.

4a Liens entre des faces d'orientations opposées.

4b Liens entre des faces de même orientation.

4c Établissement de l'unilatéralité par la jonction de faces d'orientations opposées et de même orientation.

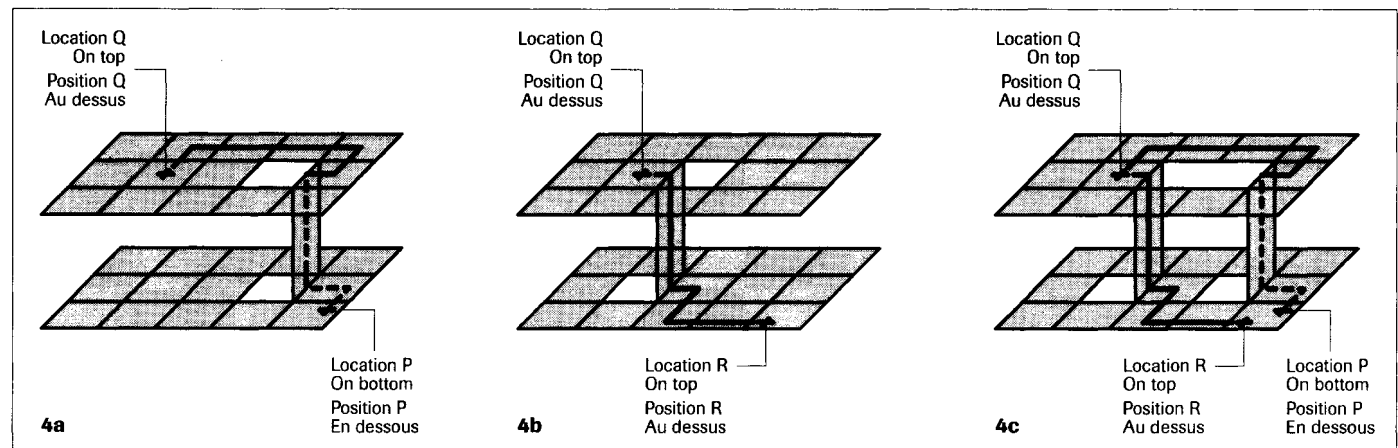


Figure 5

Example of single-sided möbius module.

5a Exploded view of a single module. All tile edges are shown.

5b Isometric view of a single module. All visible tile edges are shown.

5c Exploded view of 4 connected modules. Only perimetric tile edges are shown.

5d Isometric view of 4 connected modules. Only perimetric tile edges are shown.

Exemple de module de Möbius unilatère.

5a Vue éclatée d'un module simple. Toutes les arêtes de tuiles sont dessinées.

5b Vue isométrique d'un module simple. Toutes les arêtes visibles sont dessinées.

5c Vue éclatée de la jonction de quatre modules. Seules les arêtes des périmétriques sont dessinées.

5d Vue isométrique de la jonction de quatre modules. Seules les arêtes des tuiles périmétriques sont dessinées.

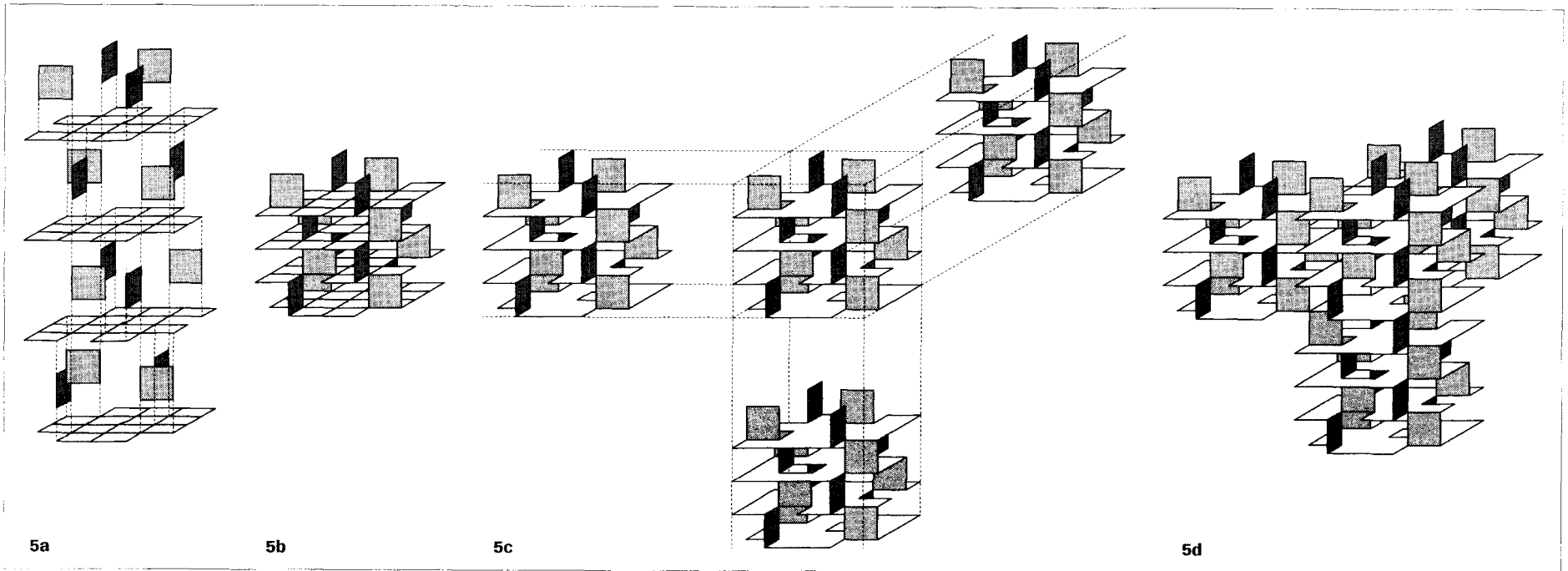
in order to maintain uniformity and structural simplicity.

To link two faces of like orientation of two consecutive parallel layers a method similar to linking opposing faces is used but the configuration of tiles is not quite as simple. Attention must first be directed towards two adjacent tile positions, A and B in one of the consecutive layers and the corresponding adjacent tile positions A' and B' respectively in the other consecutive layer. In the first layer position A must be filled with a tile while position B is empty. In the second layer the reverse is true with tile position A' empty and position B' occupied. Linkage as previously described is accomplished with a single tile which in this instance is connected both to the vacant edge of A which borders the empty tile position B in the first layer and to the vacant edge of B' which borders empty tile position of A' in the second layer. The rendering of such a link is offered in **Figure 4b**. In order to better describe the nature of this type of linkage, a route between position Q on the top of the upper layer and position R on the top to the bottom layer is shown.

To obtain a single-sided tile configuration, both types of linkages are installed between two overlapping consecutive parallel tile layers. Thus each face of each layer is linked to

inférieure vers le lieu Q sur le dessus de la couche supérieure. Notons que dans toutes les illustrations de la **figure 4**, les tuiles servant de liens ne sont représentées comme des rectangles que pour des raisons graphiques. Même si des tuiles rectangulaires auraient pu jouer le même rôle dans une telle situation, il est préférable d'utiliser des tuiles carrées afin de maintenir l'uniformité et la simplicité structurale.

Pour lier deux faces de même orientation appartenant à deux couches parallèles consécutives, on utilise une méthode semblable à celle utilisée pour lier des faces d'orientations opposées mais la configuration des tuiles n'est pas tout à fait aussi simple. On portera tout d'abord notre attention sur deux positions de tuiles adjacentes, A et B, dans l'une des couches consécutives et sur les positions des tuiles adjacentes correspondantes, A' et B', appartenant à l'autre couche consécutive. Dans la première couche, la position A doit être comblée par une tuile tandis que la position B est vide. Dans la seconde couche, l'inverse est vrai, c'est-à-dire que la position A' est vide et la position B' est occupée. Le lien décrit précédemment se réalise à l'aide d'une simple tuile qui, dans ce cas, est jointe à la fois à l'arête vacante de A qui borde la position vide de tuile B dans la première couche, et à l'arête



5a

5b

5c

5d

Figure 6

Example of single-sided möbius module.

6a Exploded view of single module. All tile edges are shown.

6b Three modules showing the only 3 allowable orientations for this modular system. All visible tile edges are shown.

6c An assortment of 6 interconnected modules. Only perimetric tile edges are shown.

Exemple de module de Möbius unilatère.

6a Vue éclatée d'un module simple. Toutes les arêtes des tuiles sont dessinées.

6b Trois modules montrant les seules trois orientations admissibles pour ce système modulaire. Toutes les arêtes visibles des tuiles sont dessinées.

6c Un assortiment de six modules joints. Seules les arêtes des tuiles périmétriques sont dessinées.

both the face of like orientation and the face of opposing orientation in the other layer which yields one continuous tiled surface that includes both faces of both layers as well as all the faces of the tiles involved in creating the linkage. This is illustrated in **Figure 4c**. For further clarification, a route is indicated from position P on the bottom of the lower layer to position Q on the top of the upper layer to the lower layer's position R on the top face of the tile from whence this journey commenced. This demonstrates single-sidedness.

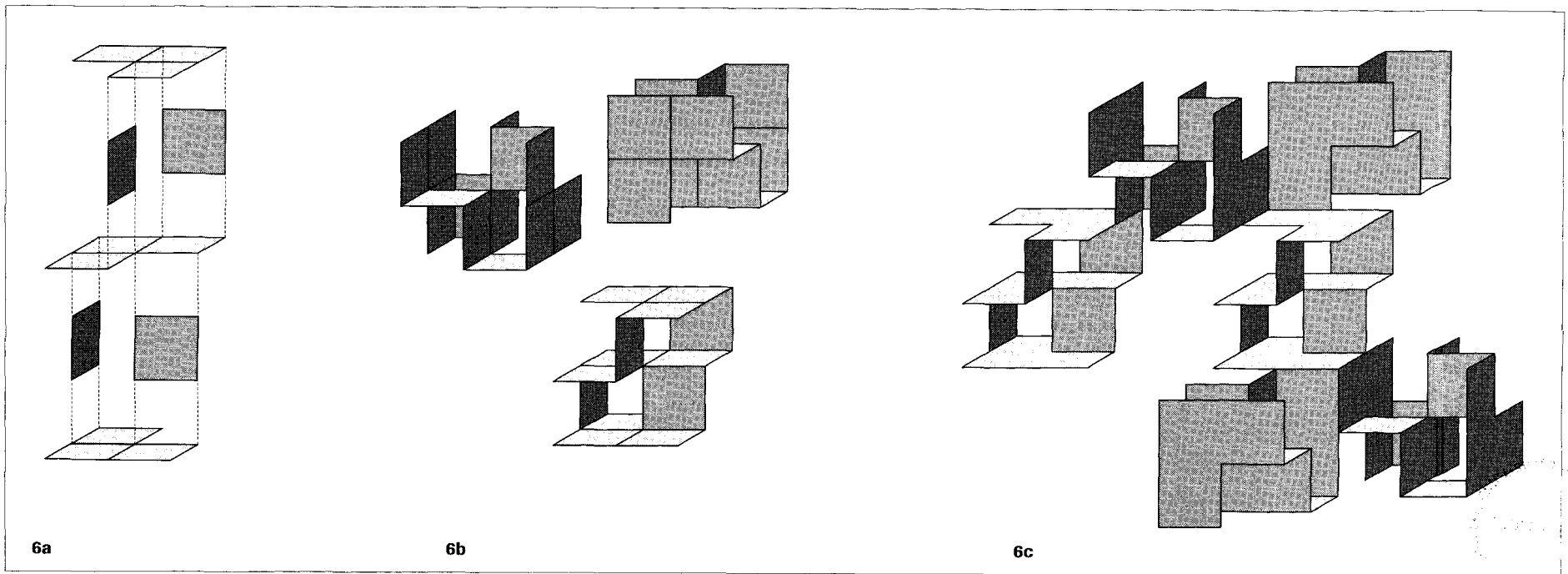
Single-sided möbius modules

The design of a single-sided möbius module is a matter of arranging two or more consecutive parallel layers of tiles into a stack and then linking all the layers according to the two methods outlined above. Moreover, at least two consecutive layers must be connected by two links where one link connects faces of like orientation and the other connects faces of opposing orientation. All tiles both within the stacked layers and the ones serving as links must be assembled according to the five construction constraints given earlier.

To this point, these guidelines can apply to any single-sided tiled structure which follow the five construction re-

vacante de BÇ qui borde la position vide de tuile AÇ dans la seconde couche. Le résultat d'un tel lien est illustré à la **figure 4b**. Afin de mieux décrire la nature de ce type de lien, on montre un chemin allant de la position Q sur le dessus de la couche supérieure à la position R sur le dessus de la couche inférieure.

Pour obtenir une configuration unilatère de tuiles, on doit installer les deux types de liens entre deux couches de tuiles parallèles consécutives se chevauchant. Ainsi, chaque face de chaque couche est liée à la fois à la face de même orientation et à la face d'orientation opposée dans l'autre couche, ce qui donne lieu à une surface continue de tuiles incluant les deux faces des deux couches de même que toutes les faces des tuiles impliquées dans la création du lien. Ceci est illustré à la **figure 4c**. Pour plus de clarté, on y indique un chemin allant de la position P sur le dessous de la couche inférieure à la position Q sur le dessus de la couche supérieure, puis vers la position R de la couche inférieure sur le dessus de la tuile correspondant à l'origine de ce chemin. Ceci démontre l'unilatéralité.



6a

6b

6c

straints. What distinguishes modules is that, in addition to following the construction constraints within the framework of each individual module, they must also follow the same constraints among tiles which form intermodular connections. And, this added requirement for which I have no general method, creates a situation which is tantamount to solving a three-dimensional jigsaw puzzle. The main problem is that of inadvertently joining more than two tiles at a common edge and thus create a set of branching surfaces instead of a single complex surface with multiple holes. While no general rule is given, two examples are: **Figures 5 and 6** illustrate two systems of single-sided Möbius modules.

Figure 5 shows a modular system in which the modules all have the same orientation. **5a and 5b** depict intramodular assembly as four consecutive horizontal layers linked by vertical tiles of both north/south and east/west orientations. **5c and 5d** convey how entire modules are connected to one another. This particular pattern of intermodular connections turns out to have the same configuration as closely-packed same-sized cubes having no face of one cube overlap an edge of another cube; cubes which touch face to face align precisely.

The result of the system in **Figure 5** is a series of expansive horizontal layers regularly disrupted by holes and by vertical linking tiles. Of course the whole configuration could be rotated to place the expansive layers into a vertical position. In any case, we can say that this type of structure is biased towards one set of parallel planes, those which form the expansive layers. The second example of a single-sided Möbius module shows no such bias.

Figure 6 depicts this second example. As with the example in **Figure 5**, intramodular assembly can be accomplished by stacking horizontal layers of tiles and connecting them with appropriate linking tiles; this process is shown in **6a**. With respect to relative intramodular assembly, all modules are identical, however, in addition to linking horizontally stacked layers in sets of three, we also link layers in sets of three with north/south orientation and with east/west orientation. All three orientations are represented in **6b**, all three must be utilized and all three must be rigidly maintained or the result will violate the five construction constraints.

These modules connect to each other to form a three-dimensional checkerboard pattern where modules alternate with empty cube-shaped spaces. An assortment of inter-

Modules de Möbius unilatères

Le design d'un module de Möbius unilatère est une question d'arrangement de deux couches parallèles consécutives ou plus en une pile, et de liens entre ces couches selon les deux méthodes décrites précédemment. De plus, au moins deux couches consécutives doivent être jointes par deux liens où un des liens joint des faces de même orientation et l'autre joint des faces d'orientations opposées. Toutes les tuiles, aussi bien celles appartenant aux couches empilées que celles jouant le rôle de liens, doivent être assemblées en respectant les cinq contraintes de construction données plus haut.

À ce point, ces lignes directrices peuvent s'appliquer à n'importe quelle structure unilatère de tuiles respectant les cinq contraintes de construction. Ce qui distingue les modules, c'est qu'en plus de respecter les contraintes de construction à l'intérieur des structures de chaque module individuel, ils doivent aussi respecter les mêmes contraintes pour les tuiles qui forment les jonctions intermodulaires. Et cette exigence supplémentaire, pour laquelle je n'ai pas de méthode générale, crée une situation qui est équivalente à la résolution des casse-tête tridimensionnels. Le principal problème est celui de joindre par inadvertance plus de tuiles en une arête commune et de créer ainsi un ensemble ramifié de surfaces plutôt qu'une seule surface complexe avec plusieurs trous. Bien qu'on ne donne pas de règle générale, les **figures 5 et 6** sont des exemples qui illustrent deux systèmes de modules de Möbius unilatères.

La **figure 5** montre un système modulaire dans lequel les modules ont tous la même orientation. **5a et 5b** montrent l'association intramodulaire composée de quatre couches horizontales consécutives liées par des tuiles verticales d'orientations nord/sud de même qu'est/ouest. **5c et 5d** illustrent la jonction entre des modules entiers. Il s'avère que ce motif particulier de jonctions intermodulaires possède la même configuration qu'un ensemble étroitement tassé de cubes de même taille où aucune face d'un cube ne chevauche une arête d'un autre cube ; les cubes qui se touchent face à face s'alignent de façon précise.

Le résultat du système de la **figure 5** est une série de couches horizontales expansibles régulièrement interrompues par des trous et par des tuiles verticales de liens. L'ensemble de la configuration peut évidemment subir une rotation afin de placer les couches expansibles dans une position verticale. Dans tous les cas, on peut dire que ce type de

modular connection are shown in **6c** and **Figure 7** is a photograph of a constructed model.

Together, the two examples given here suggest that there are many possible single-sided möbius modules even within the limitations of the five construction constraints. With the relaxation of some of the restrictions on tile shape and inter-tile connecting angles, the selection should be larger.

Concluding remarks

The idea of the single-sided möbius modules which offers a surface route between any two points located on it is intriguing in itself both as a theoretical concept and as a physical model. It could be the source of some interesting mathematical investigation such as what are the properties of the limit surface as the number of connected modules spanning a given finite volume becomes arbitrarily large and dense while the size the modules tends towards zero? Or, can there exist a system of modules that has a single edge as well as a single side and if so what does it look like?

In the area of applications, as mentioned earlier, single-sided möbius modules could serve as circuit boards for computers in order to enhance the configuration of electronic

structure est influencée par l'ensemble des plans parallèles que constituent les couches expansibles. Le second exemple de module de Möbius unilatère ne montre pas de telle influence.

La **figure 6** illustre ce second exemple. Comme dans l'exemple de la **figure 5**, l'association intramodulaire peut se réaliser en empilant des couches horizontales de tuiles et en les joignant par des tuiles de liens appropriées; la **figure 6a** montre ce processus. Par rapport à l'association intramodulaire relative, tous les modules sont identiques; toutefois, en plus de lier horizontalement les couches empilées par ensembles de trois, on lie aussi les couches par ensembles de trois selon les orientations nord/sud et est/ouest. La **figure 6b** illustre les trois orientations; toutes les trois doivent être utilisées et doivent être rigidement maintenues sans quoi le résultat violera les cinq contraintes de construction.

Ces modules se joignent les uns aux autres pour former un motif d'échiquier tridimensionnel où les modules alternent avec des espaces cubiques vides. On trouve à la **figure 6c** un assortiment de joints intermodulaires. La **figure 7** est une photographie d'un modèle construit.

Ensemble, les deux exemples présentés ici suggèrent qu'il y a plusieurs modules de Möbius unilatères possibles même à l'intérieur des limites des cinq contraintes de construction. Si on laisse tomber certaines des restrictions sur la forme des tuiles et les angles de jonction inter-tuile, les possibilités devraient être encore plus nombreuses.

Remarques de conclusion

L'idée des modules de Möbius unilatères offrant un chemin sur leur surface entre n'importe quelle paire de points situés sur eux est fascinante en soi à la fois comme concept théorique et comme modèle physique. Ce pourrait être la source de certaines recherches mathématiques intéressantes telles les questions suivantes: quelles sont les propriétés de la surface limite lorsque le nombre de modules joints englobant un volume fini donné devient arbitrairement grand et dense alors que la taille des modules tend vers zéro? Ou, existe-t-il un système de modules possédant une seule arête et un seul côté et si oui, à quoi ressemblerait-il?

Dans le champs des applications, comme on l'a mentionné plus haut, les modules de Möbius unilatères pourraient servir de cartes de circuits pour les ordinateurs dans le but d'améliorer la configuration des composants électro-

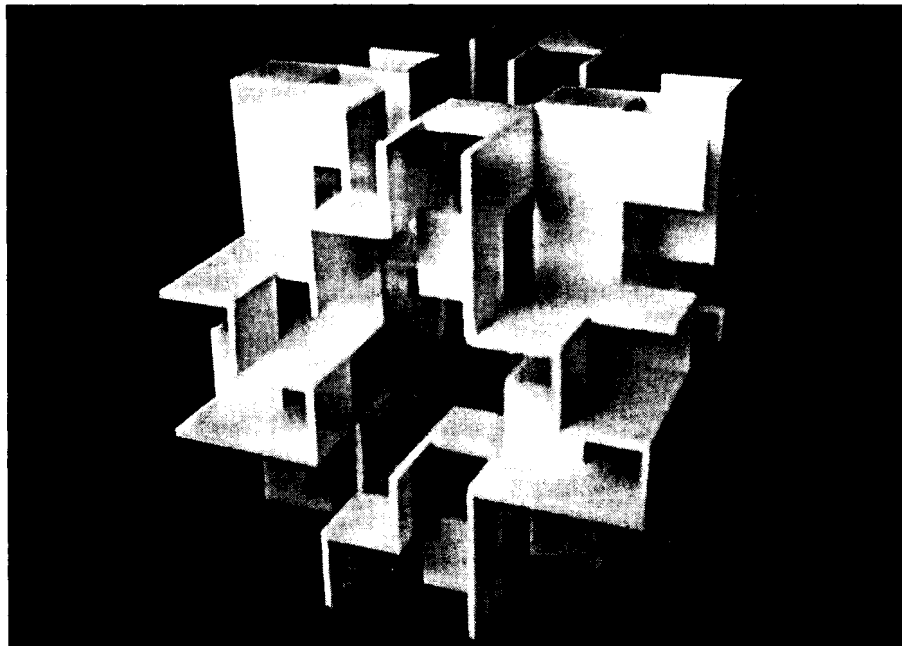


Figure 7

Photograph of 12 connected single-sided möbius modules.

Photographie de la jonction de 12 modules de Möbius unilatères.

components; specifically the modules could reduce the need for drilling holes for electrical "feed through" since all components are on the same side of the board. In chemical engineering, single-sided möbius could serve as sites upon which chemical reactions could take place.

But regardless of viewpoint, theoretical or practical, single-sided möbius modules offer us a fresh perspective on expendable modular surface systems which can extend over volumetric space. They allow us to readily think about such systems in a way that is more free from our usual conceptions of front versus back and top versus bottom in which we almost instinctively favour front and top. The single-sided möbius modules help us understand that any face of a surface is of use and worthy of consideration no matter how abstract or concrete the application involved may be.

ques; en particulier, les modules pourraient réduire le besoin de percer des trous pour des connexions électriques «passant au travers» puisque tous les composants sont sur le même côté de la carte. En génie chimique, les modules de Möbius unilatères peuvent servir comme lieux pour les réactions chimiques.

Mais quelque soit le point de vue, théorique ou pratique, les modules de Möbius unilatères nous offrent une perspective fraîche sur les systèmes de surfaces modulaires expansibles pouvant s'étendre au-delà d'un espace volumétrique. Ils nous permettent d'aborder volontiers de tels systèmes dans le sens où on est plus libre par rapport à nos conceptions habituelles de devant/derrière et dessus/dessous qui nous portaient instinctivement à favoriser le devant et le dessus. Les modules de Möbius unilatères nous amènent à comprendre que toute face d'une surface est utilisable et digne de considération, peu importe que l'application impliquée soit abstraite ou concrète.

