

Plane self stresses and projected polyhedra I: The basic pattern

Henry Crapo*

INRIA, Rocquencourt
B.P. 78153
Le Chesnay, France

and Walter Whiteley†

Department of Mathematics and Statistics
York University
4700 Keele Street
North York, Ontario
Canada M3J 1P3

* Work supported, in part, by a grant from N.S.E.R.C. (Canada) – *Travaux subventionnés, en partie, par le CRNSG du Canada.*

† Work supported, in part, by grants from N.S.E.R.C. (Canada) and F.C.A.C. (Quebec) – *Travaux subventionnés, en partie, par le CRSNG du Canada et le FCAR du Québec.*

French translation:
Traduction française:
Jean-Luc Raymond

Abstract

More than a century ago the geometer (and physicist) Clerk Maxwell described a surprising connection between static self stresses in frameworks with planar graphs, and orthogonal projections of spherical polyhedra from 3-space, using a geometric tool called the reciprocal figure. This paper initiates a thorough analysis of the 3-way connections among self stresses, reciprocal diagrams and spatial polyhedra, for both spherical polyhedra and general oriented polyhedra, and the graphs of their edges. We begin with the basic theory of frameworks, reciprocals and spatial projections. These reciprocals are useful tools both for recognizing pictures of polyhedra (in fields such as scene analysis) and for recognizing the patterns of self stresses in plane frameworks (in the study of their static rigidity and in related studies such as sphere packing).

Autocontraintes planes et polyèdres projetés I : le motif de base

Résumé

Voilà plus d'un siècle, le géomètre (et physicien) Clerk Maxwell décrivait une relation surprenante entre les autocontraintes statiques des charpentes de graphes planaires, et les projections orthogonales de polyèdres sphériques tridimensionnels, en utilisant un outil géométrique appelé la figure réciproque. On entreprend, dans cet article, une analyse approfondie des trois relations entre les autocontraintes, les diagrammes réciproques et les polyèdres spatiaux, à la fois pour les polyèdres sphériques et les polyèdres orientés généraux, et les graphes de leurs arêtes. Nous débuterons par la théorie fondamentale des charpentes, des réciproques et des projections spatiales. Ces réciproques sont des outils efficaces pour reconnaître les images de polyèdre (dans des domaines comme l'analyse de scènes) et dans la reconnaissance de motifs d'autocontraintes dans les charpentes planes (au cours de l'étude de leur rigidité statique et dans des études connexes comme la juxtaposition de sphères).

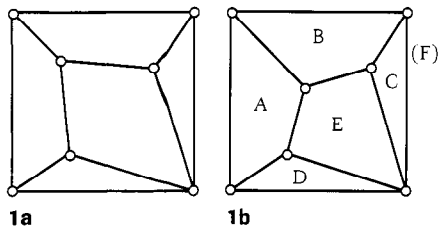


Figure 1

A plane drawing of the edges of a polyhedron may be an incorrect picture (1a) or a correct picture (1b) of a spatial polyhedron. Similarly it may form an unstressed bar framework (1a) or a stressed framework (1b).

Le dessin plan des arêtes d'un polyèdre peut être l'image incorrecte (1a) ou l'image correcte (1b) d'un polyèdre spatial. De façon similaire, il peut constituer une charpente de barres sans contrainte (1a) ou une charpente sous contrainte (1b).

1. Introduction

Given a drawing of a 3-connected planar graph, in the plane, with line segments for the edges (Figure 1a,b), we can ask two very different questions:

- (i) Is this the picture of a spherical polyhedron in space, with plane faces and non-zero dihedral angles at the edges?
- (ii) If this is built as a plane bar framework, does it support a static self stress (non-zero tension or compression in each bar reaching equilibrium at the vertices)?

Surprisingly, both questions lead to identical answers — a drawing is the picture of a spherical polyhedron (in a sense we will define) if and only if the framework supports such a self stress. With a gap of over 100 years, the same geometric tool — the reciprocal diagram — was developed for these problems, first by James Clerk Maxwell [17], and then by Mackworth and Huffman [16,13]. To check a static stress Maxwell used a polygon of forces for the equilibrium at each vertex creating a “reciprocal” drawing of a dual polyhedron with dual edges perpendicular to the original edges (Figure 2a,b).

To check a polyhedral projection Maxwell and Huffman used a “dual diagram” formed by the gradients of the faces of the spatial polyhedron, taken as plane points — again Maxwell's reciprocal. In both presentations there is some confusion about which “polyhedra” are allowed — and some topological defects in the proofs. However the insights were fundamentally sound, and we will give an explicit proof of the following results:

For a plane drawing of the edge structure of a spherical polyhedron, the following are equivalent:

- (i) the framework on this drawing supports a self stress which is non-zero on all edges;
- (ii) the drawing has a reciprocal diagram with the vertices of any edge distinct;
- (iii) there is a spatial realization of the polyhedron, with each face plane, no faces vertical, and the faces at any edge in distinct planes, which projects onto the drawing.

For non-spherical oriented polyhedra, the situation is more complex — and this was the basic source of confusion in earlier work. For any oriented polyhedron in space, with distinct planes for the faces at any edge, the vertical projection has a reciprocal diagram (on the dual graph in the sense of the underlying combinatorial polyhedron) and the reciprocal gives a self stress non-zero on all edges.

The converse is not true for non-spherical polyhedra. A

1. Introduction

Étant donné le dessin d'un graphe planaire 3-connecté, dans le plan, des segments de droite tenant lieu d'arêtes (figure 1a,b), on peut alors poser deux questions bien différentes:

- (i) Est-ce l'image d'un polyèdre sphérique dans l'espace, de faces planes et de dièdres non-nuls aux arêtes?
- (ii) Si cela était construit comme une charpente de barres dans le plan, cette charpente supporterait-elle une autocontrainte statique (tension ou compression non-nulle dans chaque barre atteignant l'équilibre aux sommets)?

De façon surprenante, ces deux questions amènent des réponses identiques — un dessin est l'image d'un polyèdre sphérique (dans un sens qu'on définira) si et seulement si la charpente supporte une telle autocontrainte. Cent ans plus tôt, le même outil géométrique — le diagramme réciproque — était développé pour ces problèmes, premièrement par James Clerk Maxwell [17], et par la suite par Mackworth et Huffman [16,13]. Afin de vérifier une contrainte statique, Maxwell a utilisé un polygone de forces pour l'équilibre à chaque sommet créant un dessin « réciproque » d'un polyèdre dual dont les arêtes duales étaient perpendiculaires aux arêtes originales (figure 2a,b).

Pour vérifier une projection polyédrique, Maxwell et Huffman ont utilisé un « diagramme dual » constitué par les gradients des faces du polyèdre spatial considérés comme des points du plan — encore la réciproque de Maxwell. Dans les deux présentations, il demeure une certaine confusion quant aux « polyèdres » permis — ainsi que certains défauts topologiques dans les démonstrations. Toutefois, les bases sont fondamentalement valables, et on donnera une démonstration explicite des résultats suivants:

Pour le dessin plan de la structure d'arêtes d'un polyèdre sphérique, les énoncés suivants sont équivalents:

- (i) la charpente construite à partir de ce dessin supporte une autocontrainte non-nulle sur toutes les arêtes;
- (ii) le dessin possède un diagramme réciproque qui, pour toute arête, a des sommets distincts;
- (iii) il existe une réalisation spatiale du polyèdre qui se projette sur le dessin; chacune de ses faces est plane, aucune face n'est verticale, et les faces incidentes à une même arête appartiennent à des plans distincts.

Pour les polyèdres orientés non-sphériques, la situation est plus complexe — et ce fut la source première de la confusion dans les premiers travaux. Pour tout polyèdre orienté dans

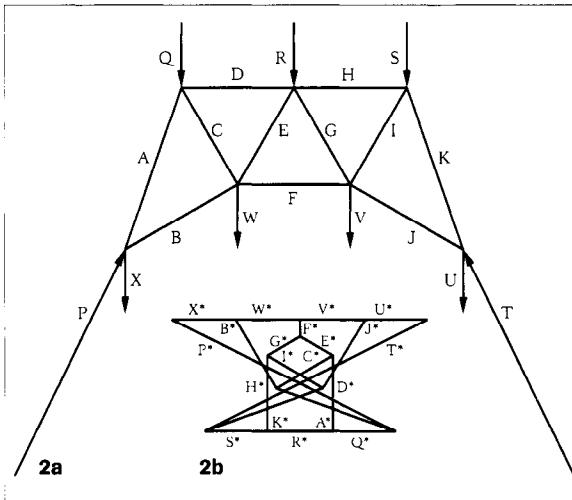


Figure 2
James Clerk Maxwell developed the reciprocal figure (2b) to show the resolution of forces in a static stress of a plane framework (2a).
James Clerk Maxwell a développé le concept de figure réciproque (2b) pour montrer la résolution des forces dans une contrainte statique d'une charpente plane (2a).

self stress does not guarantee a reciprocal figure, nor does a reciprocal figure guarantee a spatial polyhedron. We will prove the following refinements for drawings of general oriented polyhedra:

(i) A self stress corresponds to a reciprocal diagram if and only if the vector sum of the forces across any face-edge cycle on the polyhedron is zero.

(ii) A self stress corresponds to a spatial polyhedron, with plane faces, no faces vertical, and the faces at an edge in distinct planes if and only if for every face-edge cycle in the polyhedron the vector sum of the forces and the moment sum of the forces across the cycle is zero.

All these conditions are trivially true for the self stresses on any planar graph.

In what sense are these figures "reciprocal"? The primary fact is a symmetry of roles: if diagram A is reciprocal to diagram B, then diagram B is reciprocal to diagram A. Whatever property the reciprocal diagram verifies for the original diagram, the original also verifies for the reciprocal. For example, the additional cycle properties (vector sum zero on cycles, and moment sum zero on cycles) are symmetric: if one figure in the pair has the property, then the reciprocal figure also has the cycle property.

What corresponds, as a "reciprocal" in the plane, and as a spatial lifting, to a general self stress in a non-planar graph? In a second paper [8], we answer these questions by means of locally finite planar graphs which are associated with locally finite open spherical caps.

This second paper will also present the full vector space of reciprocals and spatial liftings of a plane drawing, including degenerate situations, where several points coincide, and some scalars become zero. This extension leads to the introduction of a comprehensive graphical tool for detecting projections of non-oriented polyhedra: the "cycle complete reciprocal" diagram for non-spherical oriented polyhedra.

A natural pair of reciprocal figures which occurs in geometry is the Dirichlet tessellation and its "diagram of centres" in the plane. This reciprocal pair leads to a special convex polyhedral bowl, with faces tangent to a paraboloid at the centres of the regions [11]. In general, convex polyhedral bowls correspond to spider webs — frameworks supporting tension in all members, and to sections of Dirichlet tessellations of 3-space.

l'espace, dont les faces incidentes à une arête appartiennent à des plans distincts, la projection verticale possède un diagramme réciproque (sur le graphe dual dans le sens du polyèdre combinatoire sous-jacent) et le réciproque induit une autocontrainte non-nulle sur toutes les arêtes.

La réciproque de cet énoncé n'est pas vraie pour les polyèdres non-sphériques. Une autocontrainte ne garantit pas l'existence d'une figure réciproque, et une figure réciproque ne garantit pas non plus l'existence d'un polyèdre spatial. Nous démontrerons les raffinements suivants pour les dessins de polyèdres orientés généraux :

(i) Une autocontrainte correspond à un diagramme réciproque si et seulement si la somme vectorielle des forces s'appliquant à tout cycle face-arête sur le polyèdre est nulle.

(ii) Une autocontrainte correspond à un polyèdre spatial, de faces planes, sans faces verticales, et les faces incidentes à une arête appartenant à des plans distincts, si et seulement si pour chaque cycle face-arête dans le polyèdre, la somme vectorielle des forces et la somme des moments des forces tout au long du cycle sont nulles.

Toutes ces conditions sont vraies et cela de façon triviale pour toute autocontrainte sur un graphe planaire.

En quel sens ces figures sont-elles « réciproques » ? Le fait premier est une symétrie de rôles : si le diagramme A est réciproque du diagramme B, alors le diagramme B est réciproque du diagramme A. Quelle que soit la propriété que le diagramme réciproque vérifie à propos du diagramme original, celui-ci la vérifiera aussi pour le diagramme réciproque. Par exemple, les propriétés des sommes sur les cycles (somme vectorielle nulle sur les cycles, et somme des moments nulle sur les cycles) sont symétriques : si l'une des figures de la paire possède la propriété, alors la figure réciproque possède également la propriété de cycle.

Qu'est-ce qui correspond, à titre de « réciproque » dans le plan et à titre de relèvement spatial, à une autocontrainte générale dans un graphe non-planaire ? Dans un second article [8], nous répondrons à ces questions en utilisant des graphes planaire localement fini qui sont associés à des calottes sphériques ouvertes localement finies.

Ce second article présentera aussi tout l'espace vectoriel des réciproques et des relèvements spatiaux d'un dessin plan, incluant les situations limites pour lesquelles plusieurs points coïncident et certains scalaires prennent une valeur nulle. Cette extension mène à l'introduction d'un outil graphique

These connections are summarized in [1].

The theory presented here has a polar form which is presented in [28]. In that setting, a projective section of a spatial polyhedron (the spatial polar of a projection) is paired with a projection of the polyhedron to form a new “reciprocal pair”, and the self stress of this polar section is interpreted as a set of equilibrium vertical forces in a set of woven lines in the plane.

Partial analogues of all these results exist for projections of oriented 4-polytopes, 3-dimensional reciprocals, and self stresses in spatial frameworks. These will be presented in a third paper.

Note to Engineers

These papers are written by two mathematicians, and the form of exposition reflects our concern with mathematical precision, and completeness. Nevertheless, the basic constructions and correspondences have arisen independently in several areas of the engineering literature

In the last century, the method of reciprocal diagrams for forces was developed into the methods of graphical statics. This theory used plane drawings to calculate the self stresses of a framework, and to calculate the resolution of a given external load. A number of draftsmen and engineers independently developed and used the plane constructions (Maxwell [17], Culmann [10], Jenkins [14]), and many others helped advance these studies (Bow [3], Cremona [9], Henneberg [12], see [4] for the history). For example, many calculations for the Eiffel Tower were carried out graphically by Koechlin — a student of Culmann [4]. Early in this century these graphical methods were gradually replaced by linear algebra and other numerical methods, culminating in current large scale computer calculations.

The visual recognition of a polyhedron remains, however, a very efficient tool for the analysis of self stresses in small plane frameworks. If you think of the polyhedron in space, you can also see the pattern of tension and compression which is critical to the construction of infinitesimally rigid tensegrity frameworks. In particular, the projections of convex polyhedra account for most of the basic examples which have been studied [5, 20, 25].

The tool of reciprocal diagrams has also been used by a number of engineers in recent work on polyhedral scenes. Sometimes called the gradient space [15], this has been recog-

polyvalent pour détecter les projections de polyèdres non-orientés: le diagramme « réciproque à cycle complet » pour les polyèdres non-sphériques orientés.

En géométrie, on retrouve une paire naturelle de figures réciproques: la tessellation de Dirichlet et son « diagramme de centres » dans le plan. Cette paire réciproque mène à un bol polyédrique convexe spécial dont les faces sont tangentes à un parabolôïde aux centres des régions [11]. En général, les bols polyédriques convexes correspondent à des toiles d'araignées — charpentes supportant des tensions en tous ses membres, et à des sections de tessellations de Dirichlet de l'espace tridimensionnel. Ces associations sont présentées dans [1].

La théorie présentée ici possède une forme polaire qui est décrite dans [28]. Dans ce cadre, une section projective d'un polyèdre spatial (la polaire spatiale d'une projection) est appariée à une projection du polyèdre pour constituer une nouvelle « paire réciproque »; l'autocontrainte de cette section polaire est interprétée comme un ensemble de forces verticales d'équilibre dans un ensemble de droites entrelacées dans le plan.

Il existe des analogues partiels de ces résultats pour les projections de 4-polytopes orientés, des réciproques tridimensionnels et des autocontraintes dans des charpentes dans l'espace. Nous les présenterons dans un troisième article.

Note aux ingénieurs

Ces articles ont été écrits par deux mathématiciens et la forme de l'exposé reflète notre intérêt particulier pour la précision mathématique et la complétude. Toutefois, les constructions et les correspondances fondamentales sont survenues indépendamment dans plusieurs champs de la littérature de l'ingénierie.

Au siècle passé, la méthode des diagrammes réciproques pour les forces a donné lieu aux méthodes de la statique graphique. Cette théorie se base sur des dessins dans le plan pour calculer les autocontraintes d'une charpente et pour calculer la résolution d'une charge externe donnée. Un bon nombre de dessinateurs industriels et d'ingénieurs ont développé de façon indépendante et utilisé les constructions dans le plan (Maxwell [17], Culmann [10], Jenkins [14]), et plusieurs autres ont collaboré à l'avancement de ces études (Bow [3], Cremona [9], Henneberg [12], on peut consulter [4] pour connaître l'histoire de cette théorie). Plusieurs calculs nécessaires pour la construction de la Tour Eiffel, par exemple, ont été réalisés

nized as a necessary condition for the lifting of a polyhedral picture, and sometimes accepted, without proof, as a sufficient condition. The work presented here clarifies the role of such dual diagrams for polyhedral scene analysis. We provide, in our second paper, the correct form of reciprocals which are necessary and sufficient for the projections of non-spherical oriented polyhedra.

Our polyhedral pictures are assumed to have no hidden lines or vertices, and no indication of which edge is higher or lower at a crossing. The modified problem, with such hidden lines, requires additional tools. However, the algorithms for this general question also use methods related to the statics of frameworks [21, 23, 26].

Reciprocal diagrams also occur in the study of Dirichlet tessellations and related topics in computational geometry [1]. The independent development of this one geometric construction in three diverse areas of application illustrates the fundamental importance of this construction.

The only mathematical tools in this paper are linear algebra and the geometry and topology of polyhedra, together with some vocabulary from statics. We hope that the entire presentation will therefore be accessible to engineers working in these fields.

Acknowledgements

We first learned about the correspondence between plane self stresses and projected polyhedra from Janos Baracs of the Université de Montréal. In his work as structural engineer, geometer and teacher, he had independently observed this correspondence, and conjectured that there is an analogous correspondence between spatial self stresses and projections of 4-polytopes. After several years work within the informal Structural Topology Research Group, we discovered the traces of the old theory from the last century, and reconstructed the proof. We thank Robert Connelly for ongoing conversations on the applications of reciprocal figures.

2. Preliminaries on statics and polyhedra

2.1 Statics of plane frameworks

Mathematicians have recently presented the statics of bar frameworks in several forms, both Euclidean [21] and projec-

graphiquement par Koechlin — un étudiant de Culmann [4]. Tôt dans ce siècle, ces méthodes graphiques ont été graduellement remplacées par l'algèbre linéaire et d'autres méthodes numériques, jusqu'à l'utilisation courante de l'ordinateur pour réaliser des calculs à grande échelle.

La reconnaissance visuelle d'un polyèdre demeure, toutefois, un outil très efficace pour l'analyse des autocontraintes dans de petites charpentes planes. Si l'on considère le polyèdre dans l'espace, on peut aussi voir le motif des tensions et compressions qui est critique pour la construction de charpentes de tensegrité infinitésimalement rigides. En particulier, les projections de polyèdres convexes comptent pour la plupart des exemples fondamentaux qui ont été étudiés [5, 20, 25].

Dans de récents travaux à propos des scènes polyédriques, un certain nombre d'ingénieurs ont également utilisé l'outil des diagrammes réciproques. Parfois nommé l'espace gradient [15], il a été reconnu comme une condition nécessaire pour la réalisation d'une image polyédrique, et parfois accepté, sans preuve, comme une condition suffisante. Les travaux présentés ici clarifient le rôle de tels diagrammes duals dans l'analyse des scènes polyédriques. Dans notre second article, on trouvera la forme correcte des réciproques qui est nécessaire et suffisante pour les projections des polyèdres non-sphériques orientés.

Nous supposons que nos dessins polyédriques ne possèdent pas de lignes ni de sommets cachés, non plus qu'aucune indication de l'arête qui est au-dessus de l'autre à une intersection. Le problème qui tiendrait compte de telles lignes cachées requerrait des outils additionnels. Toutefois, les algorithmes permettant d'aborder cette question générale utilisent également des méthodes relevant de la statique des charpentes [21, 23, 26].

Les diagrammes réciproques apparaissent aussi dans l'étude des tessellations de Dirichlet et dans des sujets connexes de la géométrie calculatoire [1]. Le développement de cette même construction géométrique dans trois champs différents d'application, et cela de façon indépendante, met en évidence son importance fondamentale.

Les seuls outils mathématiques utilisés dans cet article sont l'algèbre linéaire et la géométrie et la topologie des polyèdres; on utilise également un peu de vocabulaire de la statique. Nous espérons que toute la présentation sera par conséquent accessible aux ingénieurs oeuvrant dans ces domaines.

tive [8]. We will present a summary of the relevant definitions and techniques, in Euclidean terms.

- Definition 2.1. A **bar framework** in the plane is a finite graph $G = (V; E)$, with v vertices and e edges, and a mapping $\mathbf{p}: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\mathbf{p}(a) \neq \mathbf{p}(b)$ if $(a, b) \in E$.

We speak of $\mathbf{p}(a)$ as a "point", but treat this as a position vector, and use the vector space \mathbb{R}^2 .

As a convention, we write the framework as $G(\mathbf{p})$. As a convenient abuse of notation, we will write the joints $\mathbf{p}(i)$ as \mathbf{p}_i , and sometimes as i , when the framework is clear. In a framework we also speak of the bar $\{i, j\}$ or $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j$, and abuse notation to write edges as ij .

The forces exerted by such a bar in tension or compression are a pair of forces along the line of the bar, equal in magnitude, but opposite in direction at the two ends:

$$\omega_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \text{ at } \mathbf{p}_i, \text{ and } \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \text{ at } \mathbf{p}_j.$$

The scalars represent tensions ($\omega_{ij} \geq 0$) and compressions ($\omega_{ij} \leq 0$) in the bars, and the forces reach an **equilibrium** at the joint \mathbf{p}_i if:

$$\sum_j \omega_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0} \text{ (sum over } j \text{ with } ij \in E \text{ for vertex } i).$$

We give the formal definition.

- Definition 2.2. A **self stress** on a bar framework $G(\mathbf{p})$ is an assignment of scalars ω_{ij} to the edges such that, for each vertex i : $\sum_j \omega_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0}$ (sum over j with $ij \in E$).

A self stress is **non-trivial** if some $\omega_{ij} \neq 0$, and **full** if all $\omega_{ij} \neq 0$.

A framework is **independent** if it supports only the trivial self stress with all scalars zero.

At each vertex, these loads from the bars have two critical properties.

- (i) From the definition, we have the vector condition (2 linear equations):

$$\sum_j \omega_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0} \text{ (sum over } j \text{ with } ij \in E \text{ for each vertex } i).$$

- (ii) If the plane is embedded into 3-space as the plane $z = 0$, we can take cross products $(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j \times \mathbf{p}_i = \mathbf{m}_{ij} = (0, 0, m_{ij})$ to define the **turning moment** \mathbf{m}_{ij} and the **scalar turning moment** m_{ij} . Moreover, any equation in the vector moments is equivalent to an equation in the scalar moments, since all the vectors are parallel. We now have a moment equation for each vertex of the framework.

Remerciements

C'est Janos Baracs de l'Université de Montréal qui le premier nous a informé du lien entre les autocontraintes planes et les projections de polyèdres. Dans ses travaux à titre d'ingénieur en construction, de géomètre et d'enseignant, il avait observé indépendamment cette correspondance et avait émis la conjecture de l'existence d'une correspondance analogue entre les autocontraintes spatiales et les projections de 4-polytopes. Après plusieurs années de travaux au sein du groupe de recherche « Topologie Structurale », nous avons découvert les traces de l'ancienne théorie du siècle dernier et nous avons reconstruit la démonstration. Nous remercions Robert Connelly pour les conversations suivies sur les applications des figures réciproques.

2. Préliminaires sur la statique et les polyèdres

2.1 Statique des charpentes planes

Les mathématiciens ont récemment présenté la statique des charpentes de barres sous différentes formes, à la fois euclidienne [21] et projective [8]. Nous présenterons ici un résumé des définitions pertinentes et des techniques selon les termes euclidiens.

- Définition 2.1. Une **charpente de barre** dans le plan est un graphe fini $G = (V, E)$, possédant v sommets et e arêtes, et une transformation $\mathbf{p}: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\mathbf{p}(a) \neq \mathbf{p}(b)$ si $(a, b) \in E$.

Nous dirons de $\mathbf{p}(a)$ qu'il s'agit d'un « point », mais nous le traiterons comme un vecteur de position et utiliserons l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 .

À titre de convention, nous utiliserons $G(\mathbf{p})$ pour dénoter la charpente. Pour simplifier l'écriture, nous emploierons également les abus de notation suivants : pour les joints $\mathbf{p}(i)$, nous utiliserons \mathbf{p}_i et parfois i , lorsque la charpente sera bien identifiée ; nous parlerons également de la barre $\{i, j\}$ ou $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j$, et même de l'arête ij .

Les forces exercées sur une telle barre en tension ou en compression constituent une paire de forces le long de la droite de la barre, égales en grandeur mais opposées en direction aux deux extrémités :

$$\omega_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \text{ à } \mathbf{p}_i, \text{ et } \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \text{ à } \mathbf{p}_j.$$

Les scalaires représentent les tensions ($\omega_{ij} \geq 0$) et les compressions ($\omega_{ij} \leq 0$) dans les barres. Les forces atteignent un

- Proposition 2.3. For any self stress ω on a framework $G(\mathbf{p})$ and any vertex v_i : $\sum_j \omega_{ij} \mathbf{m}_{ij} = \mathbf{0}$ or $\sum_j \omega_{ij} m_{ij} = 0$ (sum over j with $ij \in E$).

Proof. Since $(\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)) = \mathbf{0}$ (sum over j with $ij \in E$), we have:

$$\mathbf{0} \times \mathbf{p}_i = (\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)) \times \mathbf{p}_i = (0, 0, \sum_j \omega_{ij} m_{ij})$$

(sum over j with $ij \in E$).

Condition (i) says there is no net translational force at \mathbf{p}_i and (ii) says that the forces do not produce a turning moment. These three equilibrium equations are also satisfied by the forces of the self-stresses in a cut set of the graph.

- Proposition 2.4. Given any cut set of edges $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$, which separates the graph G of a framework, such that all \mathbf{a}_i lie in one component C , and all \mathbf{b}_i lie in other components, then for any self stress ω on the framework on the graph:
 - $\sum \omega_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$ (sum over the cut set);
 - $\sum \omega_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i) \times \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ (sum over the cut set).

Proof. If C is a single vertex, the result is our initial observation about self stresses at a vertex.

Assume C has k vertices. Take all the edges entering any vertices of C , and the corresponding equilibrium equations for each vertex. We combine these equations over all vertices of C , giving a sum of zero. We also observe that, on any edge joining two vertices in C , the terms satisfy:

$$\omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) + \omega_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \mathbf{0} \text{ and } \omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times \mathbf{p}_i + \omega_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \times \mathbf{p}_j = \mathbf{0}.$$

Since these terms cancel, the desired residual equations hold for the cut set.

The **support** of a self stress is the set of edges on which $\omega_{ij} \neq 0$. A self stress is **full** if the support is the entire graph. If the support can be disconnected by removing a vertex v_0 , then the self stress is the sum of self stresses each supported by only one of these components (with the vertex v_0 attached). (The bars entering v_0 from one component form a cut set, so the sum over these bars alone is $\mathbf{0}$). Every self stress is the sum of self stresses each of which has a 2-connected support. Our final objective is to explain all self stresses with 2-connected support.

2.2 Preliminaries on polyhedra

There are, in the literature, many different definitions of combinatorial polyhedra, and of their realizations in space.

équilibre au joint \mathbf{p}_i si:

$$\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0} \text{ (somme sur } j \text{ où } ij \in E \text{ pour le sommet } i).$$

La définition formelle est la suivante.

- Définition 2.2. Une **autocontrainte** sur une charpente de barres $G(\mathbf{p})$ est l'assignation de scalaires ω_{ij} aux arêtes de telle sorte que, pour chaque sommet i : $\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur j où $ij \in E$).

Une autocontrainte est dite **non-triviale** si $\omega_{ij} \neq 0$ pour un certain ij , et **complète** si tous les ω_{ij} sont différents de zéro.

Une charpente est **indépendante** si elle ne supporte que l'autocontrainte triviale dont tous les scalaires sont nuls.

À chaque sommet, ces charges sur les barres possèdent deux propriétés critiques.

(i) De la définition, on a la condition vectorielle suivante (deux équations linéaires):

$$\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0}$$

(somme effectuée sur j où $ij \in E$ pour chaque sommet i).

(ii) Si le plan est plongé dans l'espace tridimensionnel comme le plan $z=0$, on peut effectuer les produits croisés $(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j \times \mathbf{p}_i = \mathbf{m}_{ij} = (0, 0, m_{ij})$ pour définir le **moment de rotation** \mathbf{m}_{ij} et le **scalaire du moment de rotation** m_{ij} . De plus, toute équation sur les moments vectoriels est équivalente à une équation sur les moments scalaires puisque tous les vecteurs sont parallèles. Nous avons maintenant une équation des moments pour chaque sommet de la charpente.

- Proposition 2.3. Pour toute autocontrainte ω sur une charpente $G(\mathbf{p})$ et tout sommet v_i : $\sum_j \omega_{ij} \mathbf{m}_{ij} = \mathbf{0}$ ou $\sum_j \omega_{ij} m_{ij} = 0$ (somme effectuée sur j où $ij \in E$).

Démonstration. Puisque $(\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)) = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur j où $ij \in E$), on a:

$$\mathbf{0} \times \mathbf{p}_i = (\sum_j \omega_{ij} (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)) \times \mathbf{p}_i = (0, 0, \sum_j \omega_{ij} m_{ij})$$

(somme effectuée sur j où $ij \in E$).

La condition (i) affirme qu'il n'existe aucune force translationnelle nette en \mathbf{p}_i et (ii) affirme que les forces ne produisent aucun moment de rotation. Ces trois équations d'équilibre sont également satisfaites par les forces des autocontraintes dans un séparateur du graphe.

- Proposition 2.4. Étant donné un quelconque ensemble séparateur d'arêtes $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ qui sépare le graphe G d'une charpente de

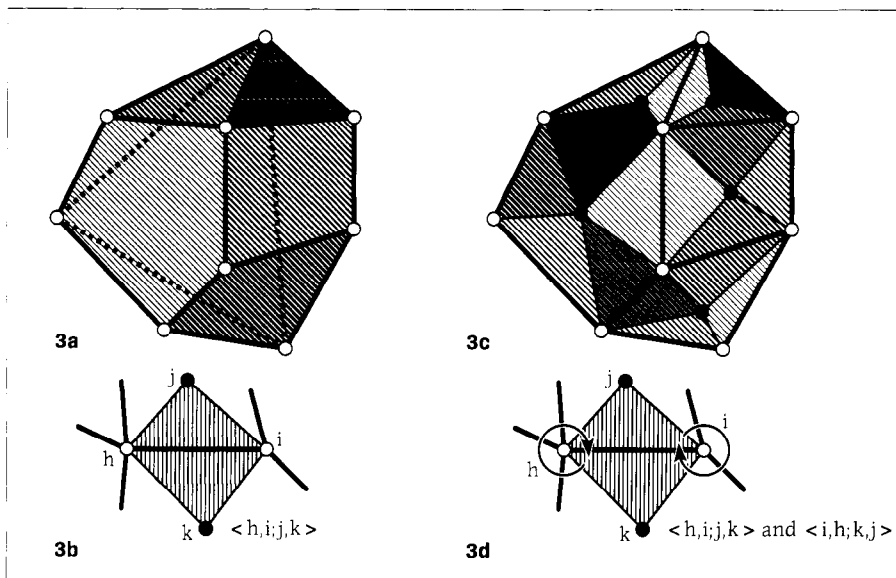
The differences occur in degenerate situations, and reflect the limits of the particular techniques being explored. For our purposes, the combinatorial concept of an oriented two-manifold, without boundary, is appropriate — but the spatial realizations will include many 'degeneracies'.

Informally, a combinatorial polyhedral surface is formed from **polygonal faces** (simple polygons surrounding a topological disc), sewn together in pairs along edges (**Figure 3a**). If we place a new point "inside" each face, joined to all of the original vertices, each edge defines a diamond shaped **patch**, with two vertices and two faces $\langle h,i;j,k \rangle$ (**Figure 3b**). We say that this edge patch **joins** the vertices h,i and **separates** the faces j,k .

The polyhedral surface is now constructed from these patches, sewn in a cycle around each vertex and each face (**Figure 3c**). We will work with oriented polyhedral surfaces, so that patch $e = \langle h,i;j,k \rangle$ is interpreted as oriented from face j to face k in the cycle at vertex h , and from vertex h to vertex i in the cycle at k (**Figure 3d**). For this orientation, the polyhedral surface has the **companion patch** $e = \langle i,h;k,j \rangle$, describing the orientation at the other vertex and face. However the polyhedral surface does not include the **opposite patches** $-e = \langle h,i;k,j \rangle$ and $-e = \langle i,h;j,k \rangle$.

There is an evident duality between the faces and vertices in this combinatorial pattern: an edge patch represents a dual

Figure 3
An oriented combinatorial polyhedron of faces, vertices and edges (**3a**) is decomposed into edge patches (**3b**) which cover the polyhedron (**3c**) forming oriented cycles around the vertices (**3d**).
Un polyèdre combinatoire orienté composé de faces, de sommets et d'arêtes (**3a**) est décomposé en pièces d'arêtes (**3b**) qui couvrent le polyèdre (**3c**) en formant des cycles orientés autour des sommets (**3d**).



telle façon que tous les \mathbf{a}_i se situent sur une composante C , et tous les \mathbf{b}_i se situent sur d'autres composantes, alors pour toute autocontrainte w sur la charpente construite sur le graphe:

- (i) $\sum \omega_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur le séparateur);
- (ii) $\sum \omega_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i) \times \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur le séparateur).

Démonstration. Si C n'est composé que d'un sommet, le résultat découle de notre observation initiale à propos des autocontraintes en un sommet.

Supposons que C soit composé de k sommets. Considérons toutes les arêtes incidentes aux sommets de C , et les équations d'équilibre correspondantes pour chaque sommet. On combine ces équations sur tous les sommets de C , ce qui donne une somme de zéro. Nous observons également que, sur toute arête joignant deux sommets de C , les termes satisfont:

$$\omega_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + \omega_j(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) = \mathbf{0} \text{ et } \omega_i(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times \mathbf{p}_i + \omega_j(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \times \mathbf{p}_j = \mathbf{0}.$$

Puisque ces termes s'annulent, les équations résiduelles désirées sont satisfaites pour le séparateur.

Le **support** d'une autocontrainte est l'ensemble des arêtes pour lesquelles $\omega_i \neq 0$. Une autocontrainte est **complète** si le support est constitué du graphe entier. Si le support peut être rendu non-connexe par la suppression d'un sommet v_0 , alors l'autocontrainte est la somme des autocontraintes supportées chacune par une seule des composantes (le sommet v_0 y étant joint). (Les barres incidentes à v_0 à partir d'une composante forment un séparateur, ainsi la somme effectuée seulement sur ces barres est $\mathbf{0}$). Toute autocontrainte est la somme d'autocontraintes dont le support est 2-connexe. Notre objectif final est l'explication de toutes les autocontraintes de support 2-connexe.

2.2 Préliminaires à propos des polyèdres

La notion de polyèdre combinatoire est définie de diverses façons dans la littérature; c'est le cas également de ses réalisations dans l'espace. Les différences apparaissent dans les cas dégénérés et reflètent les limites des techniques particulières qui ont été explorées. Pour nos fins, le concept combinatoire d'une variété de dimension deux, sans frontière, est adéquat — mais les réalisations spatiales contiendront plusieurs «dégénérescences».

De façon informelle, une surface polyédrique combinatoire est constituée de **faces polygonales** (de simples poly-

pair of edges, one in the original polyhedron, and one in a combinatorial dual. For this paper we will work with paths of edges in two ways. A **vertex-edge path** is a sequence of patches $e_r = \langle h_r, i_r; j_r, k_r \rangle$, $1 \leq r \leq t$, such that $i_r = h_{r+1}$. A **face-edge path** is a sequence of patches $e_s = \langle h_s, i_s; j_s, k_s \rangle$, $1 \leq s \leq t$, such that $k_s = j_{s+1}$.

We summarize with a formal definition.

■ Definition 2.5. A **combinatorial oriented polyhedron** is a finite set of **vertices** (abstract points) $V = \{a_1, \dots, a_m\}$, a finite set of **faces** $F = \{F^1, \dots, F^n\}$ and a finite set of **edge patches**, or ordered quadruples of indices $E = \{ \langle h, i; j, k \rangle \mid 1 \leq h, i \leq m \ 1 \leq j, k \leq n \}$ such that:

(i) If $\langle h, i; j, k \rangle \in E$, then $\langle i, h; k, j \rangle \in E$ but $\langle h, i; k, j \rangle, \langle i, h; j, k \rangle \notin E$

(ii) For each vertex a_0 , all the edge patches with first entry a_0 form a cycle: $\langle 0, i_s; j_s, k_s \rangle$, $1 \leq s \leq t$ ($t \geq 3$), with $k_s = j_{s+1}$ and $j_t = k_1$, all k_s and i_s distinct;

(iii) For each face F^0 , all the edge patches with last entry F^0 form a cycle: $\langle h_s, i_s; j_s, 0 \rangle$, $1 \leq s \leq t$ ($t \geq 3$), with $i_s = h_{s+1}$ and $i_t = h_1$, all h_s and j_s distinct;

(iv) Each pair of vertices a_0, a_1 is joined by a vertex-edge path; Each pair of faces F^0, F^1 is connected by a face-edge path.

If we associate the edge patches $\langle h, i; j, k \rangle$ and $\langle i, h; k, j \rangle$ with an oriented topological disc with a quadrilateral boundary cycle $\langle h, j, i, k \rangle = \langle i, k, h, j \rangle$, the combinatorial oriented polyhedron forms a compact oriented topological 2-manifold, without boundary. Our assumptions give a single disc for each edge $\{h, i\}$, and then guarantee that the discs at each "face" or "vertex" of the original pattern form a simple cycle as required. Throughout this paper we will work with this topology for the combinatorial polyhedron.

We have chosen a definition which is explicitly self-dual: if we interchange vertices and faces, and flip the edges around $\langle h, i; j, k \rangle$ going to $\langle j, k; h, i \rangle$, we get the **dual combinatorial oriented polyhedron**. Throughout this paper *duality* will be used in this combinatorial sense.

Each abstract polyhedron has an underlying **graph** $G(V, F; E) = (V, E)$ formed with the vertices V and an edge $\{i, j\}$ for each pair of patches $e = \langle h, i; j, k \rangle$ and $\underline{e} = \langle i, h; k, j \rangle$. Note that the condition that all i_s are distinct in the cycle $\{ \langle h, i_s; j_s, k_s \rangle \}$ prevents any multiple edges in our graph.

gones encadrant un disque topologique), liés en paire le long des arêtes (**figure 3a**). Si on place, « à l'intérieur » de chaque face, un nouveau point joint à tous les sommets originaux, chaque arête définit une **pièce** en forme de diamant constitué de deux sommets et de deux faces $\langle h, i; j, k \rangle$ (**figure 3b**). On dira que cette pièce d'arête **joint** les sommets h, i et **sépare** les faces j, k .

La surface polyédrique est maintenant construite à l'aide de ces pièces, jointes en un cycle autour de chaque sommet et de chaque face (**figure 3c**). Nous travaillerons avec des surfaces polyédriques orientées, de telle sorte que la pièce $e = \langle h, i; j, k \rangle$ est lue de façon orientée de la face j à la face k au sommet h , et du sommet h au sommet i dans le cycle en k (**figure 3d**). Pour cette orientation, la surface polyédrique possède la **pièce compagne** $\underline{e} = \langle i, h; k, j \rangle$, décrivant l'orientation aux autres sommet et face. Toutefois, la surface polyédrique ne contient pas les **pièces opposées** $-e = \langle h, i; k, j \rangle$ et $-\underline{e} = \langle i, h; j, k \rangle$.

Il existe une dualité évidente entre les faces et les sommets dans ce motif combinatoire : une pièce d'arête représente une paire duale d'arêtes, l'une appartenant au polyèdre original, et l'autre au dual combinatoire. Pour cet article, nous travaillerons des deux façons avec les pièces d'arêtes. Un **chemin sommet-arête** est une suite de pièces $e_r = \langle h_r, i_r; j_r, k_r \rangle$, $1 \leq r \leq t$, telle que $i_r = h_{r+1}$. Un **chemin face-arête** est une suite de pièces $e_s = \langle h_s, i_s; j_s, k_s \rangle$, $1 \leq s \leq t$, telle que $k_s = j_{s+1}$.

Résumons ici par une définition formelle.

■ Définition 2.5. Un **polyèdre combinatoire orienté** est un ensemble fini de **sommets** (points abstraits) $V = \{a_1, \dots, a_m\}$, un ensemble fini de **faces** $F = \{F^1, \dots, F^n\}$ et un ensemble fini de **pièces d'arêtes**, ou de quadruplets ordonnés d'indices $E = \{ \langle h, i; j, k \rangle \mid 1 \leq h, i \leq m \ 1 \leq j, k \leq n \}$ tel que:

(i) Si $\langle h, i; j, k \rangle \in E$, alors $\langle i, h; k, j \rangle \in E$ mais $\langle h, i; k, j \rangle, \langle i, h; j, k \rangle \notin E$

(ii) Pour chaque sommet a_0 , toutes les pièces d'arêtes dont la première entrée est a_0 forment un cycle: $\langle 0, i_s; j_s, k_s \rangle$, $1 \leq s \leq t$ ($t \geq 3$), où $k_s = j_{s+1}$ et $j_t = k_1$, tous les k_s et les i_s sont distincts;

(iii) Pour chaque face F^0 , toutes les pièces d'arêtes dont la dernière entrée est F^0 forment un cycle: $\langle h_s, i_s; j_s, 0 \rangle$, $1 \leq s \leq t$ ($t \geq 3$), où $i_s = h_{s+1}$ et $i_t = h_1$, tous les h_s et les j_s sont distincts;

(iv) Chaque paire de sommets a_0, a_1 est jointe par un chemin sommet-arête;

Chaque paire de faces F^0, F^1 est liée par un chemin face-arête.

We attach particular importance to the spherical combinatorial polyhedra, which have planar graphs.

- Definition 2.6. A combinatorial polyhedron is **spherical** if every closed path of faces and distinct edges: $\langle h_r, i_r; j_r, k_r \rangle$ $1 \leq r \leq t$, such that $j_{r+1} = k_r$ and $j_1 = k_t$, disconnects the vertices (i.e. the polyhedron is simply connected).

It is a standard result that a combinatorial polyhedron is spherical if and only if the polyhedron can be drawn in the plane with the vertices as points, the edges as continuous arcs intersecting only at common vertices of their edges, and the faces as the regions cut out of the plane by these arcs (including the unbounded region open to infinity). From this topology, the dual polyhedron is also spherical: every closed path of vertices and distinct edges: $\langle h_r, i_r; j_r, k_r \rangle$ $1 \leq r \leq t$, such that $h_{r+1} = i_r$ and $h_1 = i_t$, disconnects the faces.

We also see that the graph of a spherical polyhedron is **planar**: the graph can be drawn in the plane with the vertices as points, the edges as continuous arcs intersecting only at common vertices of their edges. We will characterize which planar graphs come from combinatorial spherical polyhedra. Note that throughout this paper *graphs do not have multiple edges or loops*.

- Definition 2.7. A graph $G = (V, E)$ is **vertex 2-connected** if removing any one vertex and its edges leaves the vertex set connected by the remaining edges.

A graph $G = (V, E)$ is **edge 3-connected** if removing any two edges leaves the vertex set connected by the remaining edges.

- Proposition 2.8. A graph G is the graph of a combinatorial spherical polyhedron if and only if G is a vertex 2-connected and edge 3-connected planar graph.

Proof. (a) Assume G is the graph of a combinatorial spherical polyhedron. We have observed that G is planar—and we take the corresponding embedding, with infinity inside one of the original faces.

We show that G is vertex-2-connected. Assumption (ii) of the definition guarantees that the graph is connected. Assume that the graph can be separated by removing vertex v_0 . Select one component C in the plane which is now surrounded by an annulus in the sphere. Reinserting v_0 must insert a wedge of edges from C to v_0 , and another wedges out

Si on associe les pièces d'arêtes $\langle h, i, j, k \rangle$ et $\langle i, h, k, j \rangle$ avec un disque topologique orienté dont le cycle de frontière est quadrilatère $\langle h, j, i, k \rangle = \langle i, k, h, j \rangle$, le polyèdre combinatoire orienté forme une variété topologique orientée compacte bi-dimensionnelle, sans frontière. Nos hypothèses nous donnent un seul disque pour chaque arête $\{h, i\}$, et elles garantissent que les disques en chaque « face » ou « sommet » du motif original forment un cycle simple comme voulu. Tout au long de ce texte nous ferons appel à cette topologie pour le polyèdre combinatoire.

Nous avons choisi une définition qui est explicitement son propre dual: si on interchange les sommets et les faces, et qu'on change les arêtes autour de $\langle h, i, j, k \rangle$ pour $\langle j, k, h, i \rangle$, nous obtenons le **polyèdre combinatoire orienté dual**. La notion de *dualité* sera ici utilisée dans ce sens combinatoire.

Chaque polyèdre abstrait possède un **graphe** sous-jacent $G(V, F; E) = (V, E)$ constitué des sommets V et d'une arête $\{i, j\}$ pour chaque paire de pièces $e = \langle h, i, j, k \rangle$ et $e = \langle i, h, k, j \rangle$. Notons que la condition voulant que tous les i_s soient distincts dans le cycle $\{\langle h, i_s, j_s, k_s \rangle\}$ prévient l'existence d'arêtes multiples dans notre graphe.

Nous accordons une importance particulière aux polyèdres combinatoires sphériques qui possèdent des graphes planaires.

- Définition 2.6. Un polyèdre combinatoire est **sphérique** si tout chemin fermé de faces et d'arêtes distinctes: $\langle h_r, i_r; j_r, k_r \rangle$ $1 \leq r \leq t$, tel que $j_{r+1} = k_r$ et $j_1 = k_t$, sépare les sommets (c'est-à-dire, le polyèdre est simplement connexe).

Un résultat connu affirme qu'un polyèdre combinatoire est sphérique si et seulement si le polyèdre peut être dessiné sur un plan, les sommets correspondant à des points, les arêtes à des arcs continus ne se croisant qu'en des sommets communs de leurs arêtes, et les faces à des régions délimitées dans le plan par ces arcs (incluant la région sans frontière ouverte sur l'infini). De cette topologie, le polyèdre dual est également sphérique: tout chemin fermé de sommets et d'arêtes distinctes: $\langle h_r, i_r; j_r, k_r \rangle$ $1 \leq r \leq t$, où $h_{r+1} = i_r$ et $h_1 = i_t$, sépare les faces.

On observe aussi que le graphe d'un polyèdre sphérique est **planaire**: le graphe peut être dessiné dans le plan, les sommets correspondant à des points, les arêtes à des arcs continus ne se croisant qu'en des sommets communs de leurs arêtes. Nous caractériserons les graphes planaires qui proviennent de polyèdres combinatoires sphériques. Notons

to other components (**Figure 4e**). Around C this breaks the annulus into a single face — which contacts v_0 twice, contradicting assumption (iii) of the definition that the vertices h_s of a face are distinct).

We now show that G is edge 3-connected. Assume that removing 2 edges disconnects the graph. Since the graph is at least 2-connected in a vertex-sense, these edges must attach to distinct vertices $\{a, a'\}$ and $\{b, b'\}$, joining two components. Again we look at the topology of the planar embedding around one of these components. These two edges cut out two distinct faces F^1, F^2 separated by these two edges (**Figure 4f**). In the cycle around F^1 , the face F^2 now occurs across two edges, contradicting assumption (iii), that all the adjacent faces j_s are distinct.

(b) Conversely, given any planar drawing of a vertex 2-connected, edge 3-connected graph we form a corresponding combinatorial spherical polyhedron: the arcs and vertices of the planar graph surround simple discs which will become the faces, along with the infinite region outside all the edges (**Figure 4a**). After placing a point \mathbf{f} in each face (**Figure 4b**), we add an edge patch $\langle h_i, j, k \rangle$ if and only if the circuit $\mathbf{p}_h, \mathbf{f}^i, \mathbf{p}_i, \mathbf{f}^k$ around an arc d_{ij} is a clockwise circuit (**Figure 4c**). It is a simple exercise to check that this satisfies properties (i), and (iv). We need to check that the vertices and faces around each vertex and around each face, are distinct.

Clearly the patches around each vertex form a cycle. Since we began with a graph, not a multi-graph, the vertices surrounding each vertex are distinct. If the cycle around a vertex contained a face twice, then the graph could be disconnected by removing this vertex (**Figure 4e**), contradicting the vertex 2-connectivity.

Clearly the patches around a face form a cycle. Assume that vertex occurs twice in this cycle. Since there are no loops, removing this vertex will disconnect the remaining vertices, which violates the vertex 2-connectivity. Assume that an adjacent face occurs twice in this cycle (**Figure 4f**). Clearly removing these two edges will disconnect the vertices of the graph, which violates the edge 3-connectivity.

If a spherical polyhedron is drawn in the plane, then the dual polyhedron can also be drawn in the plane, with a vertex in face region, and dual edges crossing the original edges. This shows that the dual polyhedron is also spherical. Proposition 2.8 now demonstrates that the dual graph is also vertex 2-

que tout au long de ce texte les graphes ne possèdent pas d'arêtes multiples ni de boucle.

■ **Définition 2.7.** Un graphe $G = (V, E)$ est **2-connexe en ses sommets** si la suppression de l'un quelconque de ses sommets et des arêtes qui lui sont incidentes laisse connexe l'ensemble des sommets par les arêtes restantes.

Un graphe $G = (V, E)$ est **3-connexe en ses arêtes** si la suppression de deux arêtes quelconques laisse connexe l'ensemble des sommets par les arêtes restantes.

■ **Proposition 2.8.** Un graphe G est le graphe d'un polyèdre combinatoire sphérique si et seulement si G est un graphe planaire 2-connexe en ses sommets et 3-connexe en ses arêtes.

Démonstration. (a) Supposons que G est le graphe d'un polyèdre combinatoire sphérique. On a vu que G est planaire — et nous prenons le plongement correspondant où l'infini se trouve à l'intérieur de l'une des faces originales.

Démontrons que G est 2-connexe en ses sommets. L'énoncé (ii) de la définition nous assure que le graphe est connexe. Supposons que le graphe peut être séparé par la suppression du sommet v_0 . Choisissons, dans le plan, une composante C qui est maintenant entourée par un anneau dans la sphère. La réinsertion de v_0 passe par l'insertion d'un faisceau d'arêtes de C vers v_0 , et d'un autre faisceau allant vers les autres composantes (**figure 4e**). Autour de C , ceci brise l'anneau en une seule face — qui touche deux fois à v_0 , ce qui contredit l'énoncé (iii) de la définition qui affirme que les sommets h_s d'une face sont distincts.

Montrons maintenant que G est 3-connexe en ses arêtes. Supposons que la suppression de deux arêtes sépare le graphe. Puisque que le graphe est au moins 2-connexe au sens des sommets, ces arêtes doivent être incidentes à des sommets distincts $\{a, a'\}$ et $\{b, b'\}$, joignant deux composantes. Examinons encore la topologie du plongement planaire autour de l'une de ces composantes. Les deux arêtes coupent deux faces distinctes F^1 et F^2 séparées par les deux arêtes (**figure 4f**). Dans le cycle autour de F^1 , la face F^2 apparaît maintenant comme incidente à deux arêtes de F^1 , contredisant l'énoncé (iii) qui affirme que toutes les faces adjacentes j_s sont distinctes.

(b) Réciproquement, soit un dessin plan d'un graphe 2-connexe en ses sommets et 3-connexe en ses arêtes ; on construit le polyèdre combinatoire sphérique correspondant : les arcs et

Figure 4

A plane drawing of a 2-connected planar graph (4a) defines facial regions (4b) and the edges patches (4c) for a spherical polyhedron, although the same graph may give two different combinatorial polyhedra (4d). If a planar graph is not vertex-2-connected (4e) or not edge-3-connected, the result is not an abstract polyhedron (4f).

Un dessin plan d'un graphe planaire 2-connecté (4a) définit les régions des faces (4b) et les pièces d'arêtes (4c) pour un polyèdre sphérique, quoique le même graphe peut donner lieu à deux polyèdres combinatoires différents (4d). Si un graphe planaire n'est pas 2-connecté en ses sommets (4e) ou n'est pas 3-connecté en ses arêtes, le résultat n'est pas un

connected and 3-connected in an edge-sense.

We note that a 2-connected planar graph can have different planar embeddings which create distinct combinatorial polyhedra (Figure 4d). If the planar graph is vertex 3-connected, then the combinatorial polyhedron is unique. In all cases, we call the combinatorial polyhedron created in this proof **the spherical polyhedron associated with the planar drawing** of the planar graph.

In section 4 we will be interested in vertical projections of spatial realizations of these combinatorial polyhedra. Because we will allow self-intersecting facial polygons, collinear faces and other degeneracies which are not usually allowed in "spatial polyhedra", we chose a new term for our objects.

■ Definition 2.9. A **polyhedral surface** is a combinatorial oriented polyhedron, $(V,F;E)$, with an assignment Q of points $q_i = (x_i, y_i, z_i)$ in R^3 to the vertices v_i and non-vertical planes $Q^j = (A^j, B^j, 1, C^j)$ in R^3 to the faces F^j such that:

(i) if the vertex v_i shares an edge with the face F^j , then the point q_i lies on the plane $Q^j: A^j x_i + B^j y_i + z_i + C^j = 0$.

(ii) for each edge patch $\langle h, i; j, k \rangle$ $q_h \neq q_i$ and $Q^j \neq Q^k$.

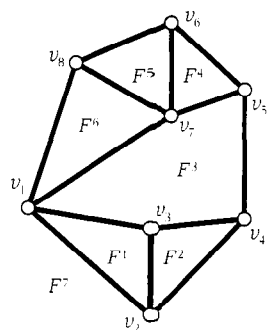
The polyhedral surface may not be an embedding, or even an immersion of the topological structure of the combinatorial polyhedron. Figure 5 illustrates some of this variety. Figure 5a shows a combinatorial polyhedron with an immersion which has some faces pass through another, non-adjacent face. Figure 5b shows an abstract octahedron with the classical

les sommets du graphe planaire entourent des disques simples qui constitueront l'ensemble des faces avec la région infinie à l'extérieur de toutes les arêtes (figure 4a). Après avoir placé un point f^i dans chaque face (figure 4b), on ajoute une pièce d'arête $\langle h, i; j, k \rangle$ si et seulement si le circuit p_h, f^i, p_i, f^k autour d'un arc d_{ij} est un circuit de sens horaire (figure 4c). Il est simple de vérifier que les propriétés (i) et (iv) sont satisfaites. Il suffit de vérifier que les sommets et les faces autour de chaque sommet et de chaque face sont distincts.

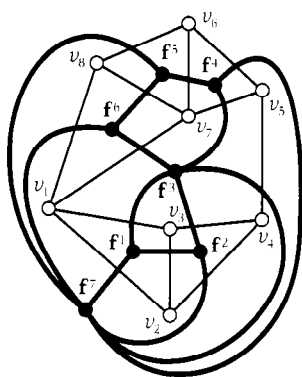
Il est clair que les pièces autour de chaque sommet forment un cycle. Puisque nous avons débuté avec un graphe, et non un multigraphe, les sommets entourant chaque sommet sont distincts. Si le cycle autour d'un sommet contient une face deux fois, alors le graphe peut être séparé par la suppression de ce sommet (figure 4e), ce qui contredit la 2-connectivité pour les sommets.

Il est clair que les pièces autour d'une face forment un cycle. Supposons qu'un sommet apparaisse deux fois dans ce cycle. Puisqu'il n'y a pas de boucle, la suppression de ce sommet séparera l'ensemble des sommets restants, ce qui viole le principe de 2-connectivité pour les sommets. Supposons qu'une face adjacente apparaisse deux fois dans ce cycle (figure 4f). Évidemment, la suppression de ces deux arêtes séparera les sommets du graphe, ce qui viole le principe de 3-connectivité pour les arêtes.

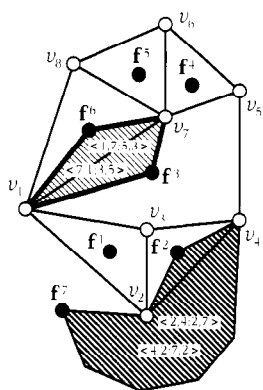
Si on dessine un polyèdre sphérique dans le plan, alors le polyèdre dual peut également être dessiné dans le plan, un



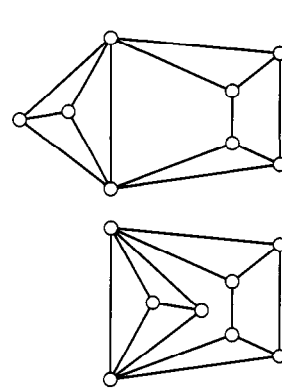
4a



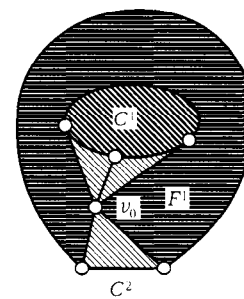
4b



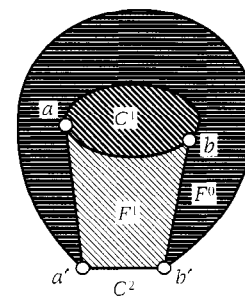
4c



4d



4e



4f

Bricard realization — which is not an immersion at the top and bottom vertices. **Figure 5c** shows a combinatorial “triangular prism” with a realization with some faces as self-intersecting polygons and a flat realization (**5d**). **Figure 5e** shows an abstract “tetrahedron” with a collinear realization (all vertices lie on a line, and all faces planes pass through the line).

For all of the definitions and proofs in this paper we will refer to the topology of the underlying combinatorial polyhedron, rather than the topology of the polyhedral surface. For example, a polyhedral surface is **spherical** if the underlying combinatorial polyhedron is spherical.

3. Plane self stresses and reciprocal figures

For a vertex of a plane framework with a full self stress the equation $\sum \omega_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \mathbf{0}$ can be geometrically represented as a closed polygon of forces. If we cycle around the vertex, placing the vectors $\omega_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ end to end, we form a closed polygon. For a combinatorial oriented polyhedron, this will create a polygon for each vertex. For the two vertices of an edge, we will have parallel, but opposite vectors in these polygons (**Figure 6ab**). It is just plausible that all these polygons can be fitted together to form a drawing of the dual combinatorial polyhedron, with edges parallel to the original framework (**Figure 6c**). This is the essence of a reciprocal diagram for a self stress in a polyhedral graph.

Such a “parallel reorganization” of the vector equilibria is a natural pattern for plane statics. However we want to go beyond a plane drawing of the dual to a spatial construction of

sommet tenant lieu de face et les arêtes duales croisant les arêtes d'origine. Ceci montre que le polyèdre dual est aussi sphérique. La proposition 2.8 démontre maintenant que le graphe dual est aussi 2-connexe en ses sommets et 3-connexe en ses arêtes.

Notons qu'un graphe planaire 2-connexe peut être plongé de différentes façons dans le plan, ce qui donne lieu à des polyèdres combinatoires distincts (**figure 4d**). Si le graphe planaire est 3-connexe en ses sommets alors le polyèdre combinatoire est unique. Dans tous les cas, nous nommerons le polyèdre combinatoire créé dans cette démonstration le **polyèdre sphérique associé au dessin plan** du graphe planaire.

Dans la section 4 nous nous intéresserons aux projections verticales des réalisations spatiales de ces polyèdres combinatoires. Puisque nous permettrons l'auto-intersection des faces polygonales, les faces colinéaires et d'autres dégénérescences qui ne sont habituellement pas acceptées pour les «polyèdres spatiaux», nous désignerons ces objets par un nouveau terme.

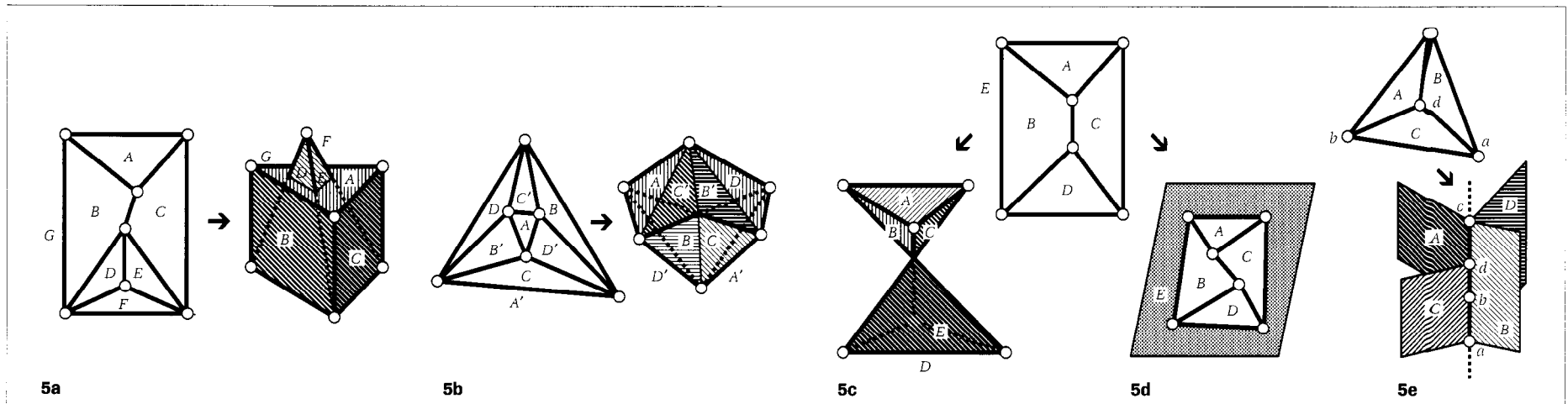
■ Définition 2.9. Une **surface polyédrique** est un polyèdre combinatoire orienté, $(V,F;E)$, et l'assignation \mathbf{Q} de points $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ de R^3 au sommets v_i et de plans non-verticaux $\mathbf{Q}^j = (A^j, B^j, 1, C^j)$ de R^3 aux faces F^j de telle sorte que:

- (i) si le sommet v_i partage une arête avec la face F^j , alors le point \mathbf{q}_i se situe sur le plan \mathbf{Q}^j : $A^j x_i + B^j y_i + z_i + C^j = 0$.
- (ii) pour chaque pièce d'arête $\langle h, i, j, k \rangle$ $\mathbf{q}_h \neq \mathbf{q}_i$ et $\mathbf{Q}^j \neq \mathbf{Q}^k$.

La surface polyédrique peut ne pas être un plongement, ou

Figure 5
The polyhedral surface realizing a combinatorial polyhedra can show a variety of topological, and geometric degeneracies.

La surface polyédrique réalisant un polyèdre combinatoire peut démontrer une variété de dégénérescences topologiques et géométriques.



the original polyhedral surface. For this reason we will rotate the reciprocal 90° clockwise and use edges that are mutually perpendicular. This is the pattern first used by Clerk Maxwell [18].

■ Definition 3.1. Given a plane framework $H = ((V;E);\mathbf{p})$ which is the graph of a combinatorial oriented polyhedron $(V,F;E)$, a **reciprocal framework** is a plane framework $H^* = ((F;E);\mathbf{P})$ on the dual combinatorial polyhedron such that for each edge patch $\langle h,i;j,k \rangle$ the vector $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_h$ is perpendicular to the vector $\mathbf{V}^e = \mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j$ from the reciprocal.

In Figure 7 we show some reciprocal pairs of planar graphs. In Figure 7a and 7c, the original drawing is very general, since every initial drawing has a reciprocal. In Figure 7e, the drawing was carefully constructed, since there are geometric conditions to the existence of a reciprocal.

With our polyhedral description in terms of patches, we have a simple proof of Maxwell's Theorem, which clarifies the role of planarity in the topology of the result. Rotation of a vector \mathbf{u} by 90° clockwise will be written \mathbf{u}^+ , and 90° counter-clockwise will be $-\mathbf{u}^+$.

■ Theorem 3.2 (Maxwell). A plane framework on a planar graph, which is vertex 2-connected and edge 3-connected, supports a full self stress if and only if it has a reciprocal framework.

Proof. Take a planar drawing of the graph, and form the associated spherical polyhedron for this drawing, as in the proof

même une immersion de la structure topologique du polyèdre combinatoire. La figure 5 illustre l'une de ces variétés. la figure 5a montre un polyèdre combinatoire et une immersion dont certaines faces passent à travers une autre face qui est non-adjacente. La figure 5b montre un octaèdre abstrait et la réalisation classique de Bricard—qui n'est pas une immersion aux sommets du haut et du bas. La figure 5c montre un « prisme triangulaire » combinatoire et une réalisation dont certaines faces se croisent elles-même, de même qu'une réalisation plane (5d). La figure 5e montre un « tétraèdre » abstrait et une réalisation colinéaire (tous les sommets se situent sur une droite et toutes les faces planes passent à travers cette droite).

Pour toutes les définitions et les démonstrations de cet article nous ferons appel à la topologie du polyèdre combinatoire sous-jacent, au lieu de la topologie de la surface polyédrique. Par exemple, une surface polyédrique est **sphérique** si le polyèdre combinatoire sous-jacent est sphérique.

3. Autocontraintes planes et figures réciproques

Pour un sommet d'une charpente plane subissant une autocontrainte complète, l'équation $\Sigma \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \mathbf{0}$ peut être géométriquement représentée par un polygone de forces fermé. Si on effectue un cycle autour du sommet en plaçant les vecteurs $\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ à la suite les uns des autres, on forme un polygone fermé. Lorsqu'il s'agit d'un polyèdre combinatoire orienté, cela crée un polygone pour chaque sommet. Pour les deux sommets d'une arête, on aura deux vecteurs parallèles mais opposés dans ces polygones (figure 6ab). Il est précisé-

Figure 6

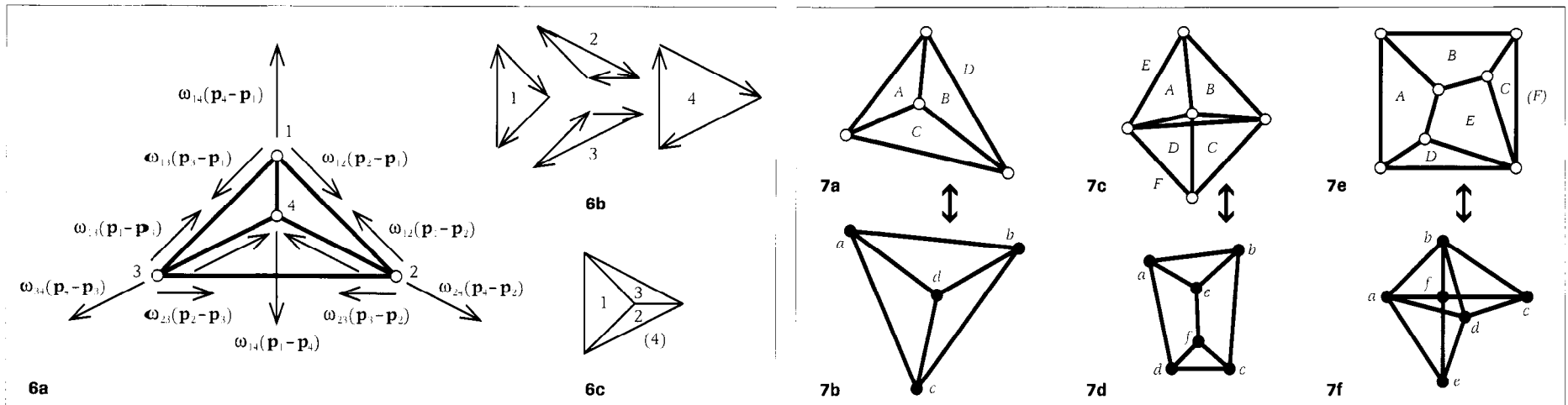
At each vertex, the equilibrium of forces in a self stress (6a) leads to a dual polygon of forces (6b). These polygons fit together to form a drawing of the dual polyhedron (6c).

En chaque sommet, l'équilibre des forces dans une autocontrainte (6a) donne lieu à un polygone dual de forces (6b). Ces polygones se juxtaposent pour former un dessin du polyèdre dual (6c).

Figure 7

A reciprocal for a framework on a planar graph is a framework on the dual graph, with dual edges perpendicular to the original edges. Note that Figures 7e, 7f show a reciprocal for Figure 1a.

Un réciproque pour une charpente sur un graphe planaire est une charpente sur le graphe dual, les arêtes duales sont perpendiculaires aux arêtes originales. Notons que les figures 7e et 7f illustrent un réciproque pour la figure 1a.



of Proposition 2.9.

(a) Assume that the framework has a reciprocal framework. For each edge patch $e = \langle h, i, j, k \rangle$ of the spherical polyhedron we use the equation $\omega_{hi}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_h) = -(\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j)^\perp$, or $\omega_e \mathbf{v}_e = (\mathbf{V}^e)^\perp$, to define the scalars $\omega_{hi} = \omega_e$. Since $\omega_{hi}(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_i) = -(\mathbf{P}^j - \mathbf{P}^k)^\perp$, this definition gives the same scalar for the other patch e on the edge. All these scalars are non-zero, since $\mathbf{P}^j \neq \mathbf{P}^k$ in a framework. The vector condition $\sum \omega_{hi}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_h) = \mathbf{0}$, or $\sum \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$, follows from the facial polygons of the reciprocal framework. Thus the reciprocal yields a full self stress.

(b) Assume we have a full self stress on the framework. Pick a face F^0 of the polyhedron and any point \mathbf{P}^0 for this face. Any other face F^1 is connected by a simple face-edge path of edge patches $\{\dots e \dots\}$. We define $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^0 + \sum \omega_e \mathbf{v}_e^\perp$.

This is a consistent definition provided that two different paths from F^0 to F^1 give the same point for \mathbf{P}^1 . Two such paths form a closed path on the spherical polyhedron—and therefore the edges of the path form a cut set for the graph of the polyhedron. If we pass up one path and back the other $\sum \omega_e \mathbf{v}_e - \sum \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ over this cut set. The sums on the two paths are equal, as required.

For each edge $e = \langle h, i, j, k \rangle$ the path from \mathbf{P}^j to \mathbf{P}^k is this single edge, and the difference in position is $\mathbf{P}^j - \mathbf{P}^k = -\omega_e \mathbf{v}_e^\perp$. Thus we have a true reciprocal.

■ **Example 3.3.** Figure 8 shows the self stresses corresponding to the reciprocal pair of Figure 7a, with the forces scaled to $1/3$ for visual clarity.

ment vraisemblable que l'on puisse assemblé tous ces polygones pour construire un dessin du polyèdre combinatoire dual dont les arêtes sont parallèles à la charpente originale (figure 6c). C'est l'idée de fond d'un diagramme réciproque pour une autocontrainte dans un graphe polyédrique.

Une telle «réorganisation parallèle» de l'équilibre vectoriel est un motif naturel pour la statique plane. Nous voulons toutefois aller au-delà du dessin plan du dual pour refaire la construction spatiale de la surface polyédrique originale. C'est pour cette raison que nous effectuerons sur le réciproque une rotation de 90° dans le sens horaire et que nous utiliserons les arêtes qui sont mutuellement perpendiculaires. Il s'agit du motif utilisé initialement par Clerk Maxwell [18].

■ **Définition 3.1.** *Étant donnée une charpente plane $H = ((V;E);\mathbf{p})$ qui est le graphe d'un polyèdre combinatoire orienté $(V,F;E)$, une charpente réciproque est une charpente plane $H^* = ((F;E);\mathbf{P})$ sur le polyèdre combinatoire dual telle que pour chaque pièce d'arête $\langle h, i, j, k \rangle$ le vecteur $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_h$ est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{V}^e = \mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j$ du réciproque.*

Dans la figure 7, on montre certaines paires réciproques de graphes planaires. En 7a et 7c, le dessin original est très général puisque tout dessin initial possède un réciproque. En 7e, le dessin a été construit avec soin car l'existence d'un réciproque dépend de certaines conditions géométriques.

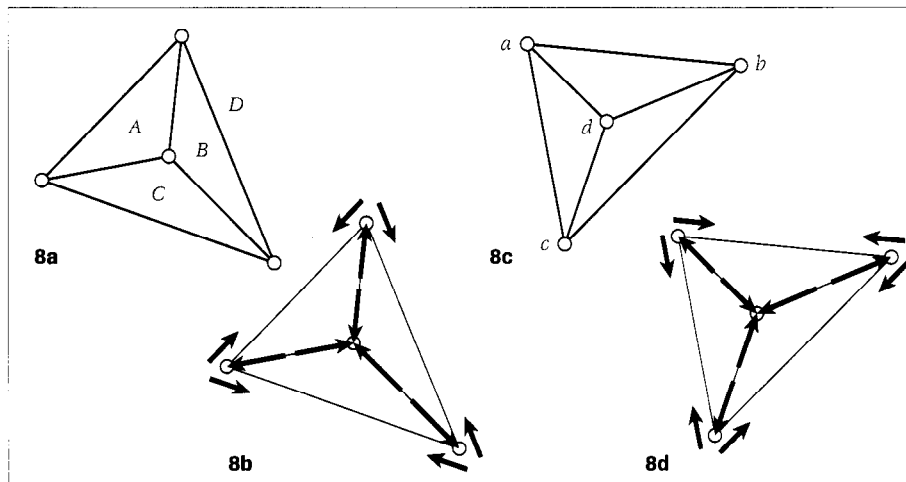
Selon notre description polyédrique en termes de pièces, on peut donner une démonstration simple du théorème de Maxwell; elle clarifie le rôle de la planarité dans la topologie du résultat. La rotation de 90° dans le sens horaire d'un vecteur \mathbf{u} sera noté \mathbf{u}^\perp , et sa rotation de 90° dans le sens trigonométrique, $-\mathbf{u}^\perp$.

■ **Théorème 3.2 (Maxwell).** *Une charpente plane construite sur un graphe planaire 2-connexe en ses sommets et 3-connexe en ses arêtes supporte une autocontrainte complète si et seulement si elle possède une charpente réciproque.*

Démonstration. Considérons un dessin plan du graphe et formons, pour ce dessin, le polyèdre sphérique associé comme dans la démonstration de la proposition 2.9.

(a) Supposons que la charpente possède une charpente réciproque. Pour chaque pièce d'arête $e = \langle h, i, j, k \rangle$ du polyèdre sphérique on utilise les équations $\omega_{hi}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_h) = -(\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j)^\perp$, ou $\omega_e \mathbf{v}_e = (\mathbf{V}^e)^\perp$, pour définir les scalaires $\omega_{hi} = \omega_e$. Puisque $\omega_{hi}(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_i) = -(\mathbf{P}^j - \mathbf{P}^k)^\perp$, cette définition donne le même scalaire pour

Figure 8
A reciprocal pair of frameworks defines a self stress in each of the frameworks.
Une paire réciproque de charpentes définit une autocontrainte dans chacune des charpentes.



- Example 3.4. **Figure 9a** shows a framework which has a vector space of self stresses. **Figures 9b, 9c** and **9d** show some reciprocals for the generators of this space. These vector spaces will be investigated in our second paper.

As we saw above, a self stress on a planar graph can be easily decomposed into self stresses supported by vertex-2-connected components. We have seen that a vertex-2-connected planar graph is not enough to generate a spherical polyhedron. Unfortunately, there are plane self stresses that do not easily break up into components which are 3-connected in an edge sense. For example, a collinear triangle contains such a self stress. In the next paper we will broaden our definitions to incorporate such degenerate situations, as well less obvious, but equally relevant examples shown in **Figure 10**.

It is easy to see how the result generalizes to other oriented polyhedra.

- Corollary 3.5. *Given any combinatorial oriented polyhedron $(V, F; E)$ and any framework $H = ((V; E); \mathbf{p})$, there is a full self stress on the framework satisfying:*
 $\sum_e \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ (sum over any face-edge cycle in the polyhedron)
if and only if there is a reciprocal framework $H^ = ((F; E); \mathbf{P})$.*

Proof. (a) Given a reciprocal, there is, as before, a full self stress. For any face-edge cycle: $\omega_e \mathbf{v}_e = (\mathbf{V}^c)^\perp$. Since the vectors \mathbf{V}^c form a closed polygon in the reciprocal, $\sum_e (\mathbf{V}^c)^\perp$ is $\mathbf{0}$.

(b) Given a full self stress, we proceed, as before, to define the reciprocal by $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^0 + (\sum_e \omega_e \mathbf{v}_e)^\perp$. Given any two paths be-

l'autre pièce \underline{e} sur l'arête. Tous ces scalaires sont non-nuls puisque $\mathbf{P}^j \neq \mathbf{P}^k$ dans la charpente. La satisfaction de la condition vectorielle $\sum \omega_{hi} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_h) = \mathbf{0}$, ou $\sum \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ vient des faces polygonales de la charpente réciproque. Ainsi, le réciproque mène à l'autocontrainte complète.

(b) Supposons que l'on ait une autocontrainte complète sur la charpente. Choisissons une face F^0 du polyèdre et un point quelconque \mathbf{P}^0 pour cette face. Toute autre face F^1 est jointe par un simple chemin face-arête de pièces d'arêtes $\{\dots e \dots\}$. On définit $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^0 + \sum \omega_e \mathbf{v}_e^\perp$.

C'est une définition consistante pourvu que deux différents chemins de F^0 à F^1 donne le même point pour \mathbf{P}^1 . Deux tels chemins forment un chemin fermé sur le polyèdre sphérique – et ainsi les arêtes du chemin constitue un séparateur pour le graphe du polyèdre. Si on laisse passer un chemin pour l'autre $\sum \omega_e \mathbf{v}_e - \sum \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ sur ce séparateur. Les sommes sur les deux chemins sont égales, comme voulu.

Pour chaque arête $e = \langle h, i, j, k \rangle$, le chemin de \mathbf{P}^j à \mathbf{P}^k est la seule arête et la différence des positions est $\mathbf{P}^j - \mathbf{P}^k = -\omega_e \mathbf{v}_e^\perp$. On a ainsi un vrai réciproque.

- Exemple 3.3. La **figure 8** illustre les autocontraintes correspondant à la paire réciproque de la **figure 7a**; les forces sont représentées à une échelle de $1/3$ pour plus de clarté.

- Exemple 3.4. La **figure 9a** montre une charpente qui possède un espace vectoriel d'autocontraintes. Les **figures 9b, 9c** et **9d** montrent certains réciproques pour les générateurs de cet espace. Nous étudierons ces espaces vectoriels dans notre second article.

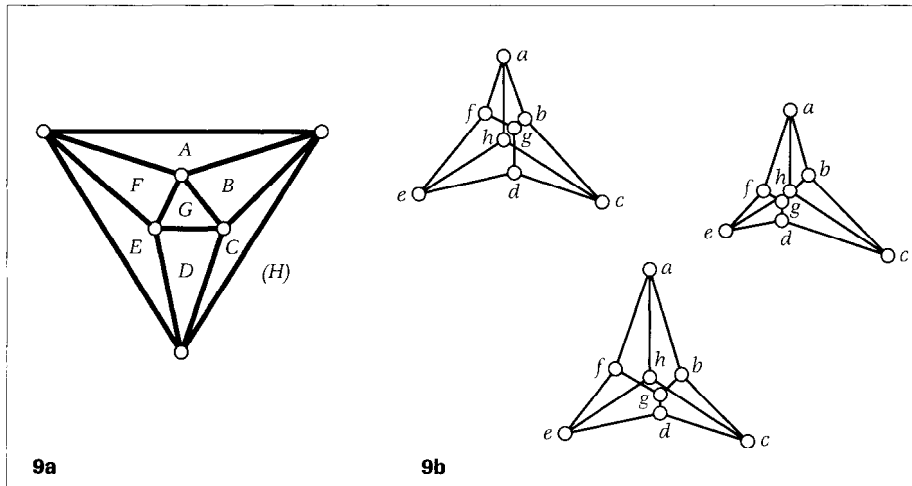
Comme nous avons vu plus haut, une autocontrainte sur un graphe planaire peut facilement être décomposée en autocontraintes supportées par des composantes 2-connexes en leurs sommets. On a vu qu'un graphe planaire 2-connexe en ses sommets n'est pas suffisant pour engendrer un polyèdre sphérique. Malheureusement, il existe des autocontraintes planes qui ne se décomposent pas facilement en composantes 3-connexes en leurs arêtes. À titre d'exemple, un triangle colinéaire contient une telle autocontrainte. Dans le prochain article, nous élargirons nos définitions pour y inclure de telles situations limites, de même que certaines moins évidentes mais également pertinentes illustrées à la **figure 10**.

On peut facilement voir comment les résultats se généralisent à d'autres polyèdres orientés.

Figure 9

Some 2-connected planar graphs produce degenerate polyhedra or degenerate dual graphs.

Certains graphes planaire 2-connexes produisent des polyèdres dégénérés ou des graphes duaux dégénérés.



9a

9b

tween F^0 and F^1 , we get the same value for \mathbf{P}^1 , since the sum up one path and back the other is covers a cycle and gives $\mathbf{0}$ (by our assumption).

It is natural to ask whether there are self stresses for non-spherical polyhedra which violate the condition $\sum_e \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$. The next example has a self stress violating this condition.

■ **Example 3.6.** Consider the toroidal framework in **Figure 11a**. The topology of this example is the triangular prisms joined across common triangles, and the dual polyhedron has the same combinatorial pattern. **Figure 11b** shows an unusual "infinite reciprocal". For each vertex, we have multiple copies of the reciprocal quadrilateral, all using the same vectors. These polygons do define a self stress for the edges (**Figure 11c**), which reaches an equilibrium at each vertex.

Since the polygons repeat, we find that a closed face-edge path such as HBE leads to a vector sum hb, be, eh' , which is not zero (**Figure 11d**). The self stress violates the cycle condition.

There is a method to incorporate non-planar graphs. An old technique, dating back to Bow, 1873 [3] lets us take any two bars which intersect, not at their vertices, and add this joint to split the bars (**Figure 12a**).

■ **Theorem 3.6.** *Given a plane framework with bars ab and cd which intersect at a point q distinct from these vertices, then the framework formed by adding the joint q and replacing*

■ **Corollaire 3.5.** *Étant donné un polyèdre combinatoire orienté $(V,F;E)$ et une charpente $H = ((V;E);P)$, il existe une autocontrainte complète sur la charpente satisfaisant : $\sum_e \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur tout cycle face-arête dans le polyèdre) si et seulement si il existe une charpente réciproque $H^* = ((F;E);P)$.*

Démonstration. (a) Étant donné un réciproque, il existe, comme auparavant, une autocontrainte complète. Pour tout cycle face-arête: $\omega_e \mathbf{v}_e = (\mathbf{V}^e)^\perp$. Puisque les vecteurs \mathbf{V}^e forment un polygone fermé dans le réciproque, $\sum_e (\mathbf{V}^e)^\perp$ est égal à $\mathbf{0}$. (b) Étant donnée une autocontrainte complète, nous procédons, comme avant, en définissant le réciproque par $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^0 + (\sum_e \omega_e \mathbf{v}_e)^\perp$. Étant donné deux quelconques chemins entre F^0 et F^1 , on obtient la même valeur pour \mathbf{P}^1 , puisque la somme sur un chemin puis sur l'autre recouvre un cycle et donne $\mathbf{0}$ (selon notre hypothèse).

On peut naturellement se demander s'il existe des autocontraintes pour les polyèdres non-sphériques qui violent la condition $\sum_e \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$. L'exemple suivant possède une autocontrainte violant cette condition.

■ **Exemple 3.6.** Considérons la charpente torique de la **figure 11a**. La topologie de cet exemple est basé sur les prismes triangulaires joints par des triangles communs et le polyèdre dual possède le même motif combinatoire. La **figure 11b** montre un inhabituel « réciproque infini ». On a, pour chaque sommet, des copies multiples du quadrilatère réciproque ; elles utilisent toutes les mêmes vecteurs. Ces polygones permettent de définir une autocontrainte pour les arêtes (**figure 11c**) ; celle-ci atteint un équilibre à chaque sommet.

Puisque les polygones se répètent, on a qu'un chemin face-arête fermé tel HBE mène à une somme vectorielle hb, be, eh' non-nulle (**figure 11d**). L'autocontrainte viole la condition des cycles.

Il existe une méthode pour incorporer les graphes non-planaires. Une ancienne technique, datant de Bow en 1873 [3], nous permet de choisir une paire de barres qui se croisent ailleurs qu'en leurs sommets pour ajouter ce joint et diviser les arêtes (**figure 12a**).

■ **Théorème 3.6.** *Étant donné une charpente plane dotée de barres ab et cd se croisant en un point q distinct de leurs sommets, alors la charpente réalisée par l'ajout du joint q et le rem-*

Figure 10
The edges of a toroidal combinatorial polyhedron (**10a**) may have a self stress (**10b**) which does not give a simple reciprocal framework. Les arêtes d'un polyèdre combinatoire torique (**10a**) peut posséder une autocontrainte (**10b**) qui ne donne pas lieu à une charpente réciproque simple.

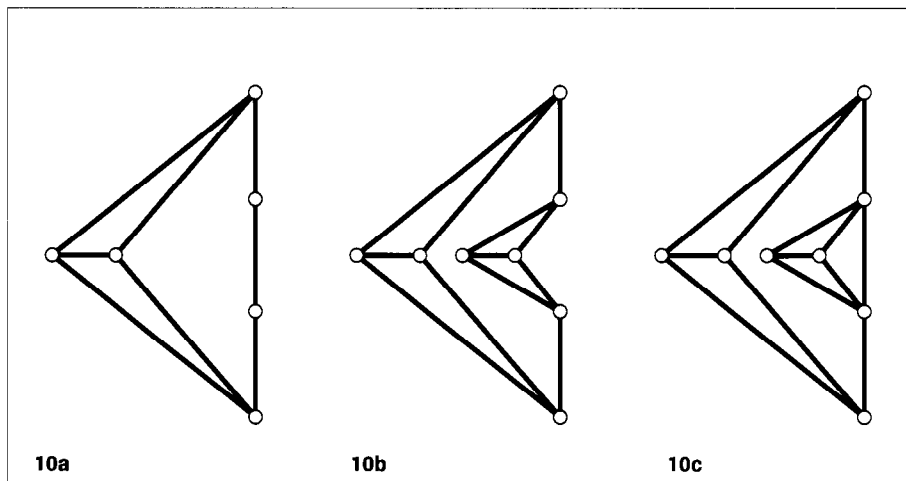


Figure 11

In a plane framework with two crossing bars (11a), the crossing point can be added (11b) without changing the kinds of static self stresses or infinitesimal motions. However some non-planar frameworks will not permit this addition of crossing points (11c).

Dans une charpente plane où deux barres se croisent (11a), le point de croisement peut être ajouté (11b) sans changer les types d'autocontraintes statiques ou de mouvements infinitésimaux. Certaines charpentes non-planaires ne permettent toutefois pas cet ajout de points de croisement (11c).

bars ab , cd by bars aq , bq , cq , dq has an isomorphic space of self stresses (and infinitesimal motions).

While this will turn a general drawing of a non-planar graph into a planar graph — and let us use spherical polyhedra to search for self stresses, it cannot be applied to every plane framework. Figure 12b shows a framework with the non-planar graph $K_{3,3}$, and a self stress, but the coincident vertices prevent any application of Theorem 3.6.

4. Spatial polyhedral surfaces

A single spatial polyhedral surface generates the reciprocal pair of frameworks for a planar graph. One figure is the orthogonal projection of the vertices and edges of the polyhedral surface, while the other is a diagram formed by the normals to the faces.

- Definition 4.1. The **vertex diagram** of an oriented polyhedral surface $((V,F;E);Q)$ is the plane framework on the projection, with the graph $(V;E)$, and points $p_i = (x_i, y_i, 0)$, if $q_i = (x_i, y_i, z_i)$.
- Definition 4.2. The **face diagram** of an oriented polyhedral surface $((V,F;E);Q)$ is the framework with the graph $(F;E)$ and points $P^j = (A^j, B^j, 0)$ for F^j , if $Q^j = (A^j, B^j, 1, C^j)$. The points in the face diagram are the intersections of the plane $z=0$ with the normals to the faces through the point $(0,0,-1)$. Equivalently, they are the negatives of the gradients of the face planes, treated as functions of x and y .

In Figure 13 we show a single edge, with its projection

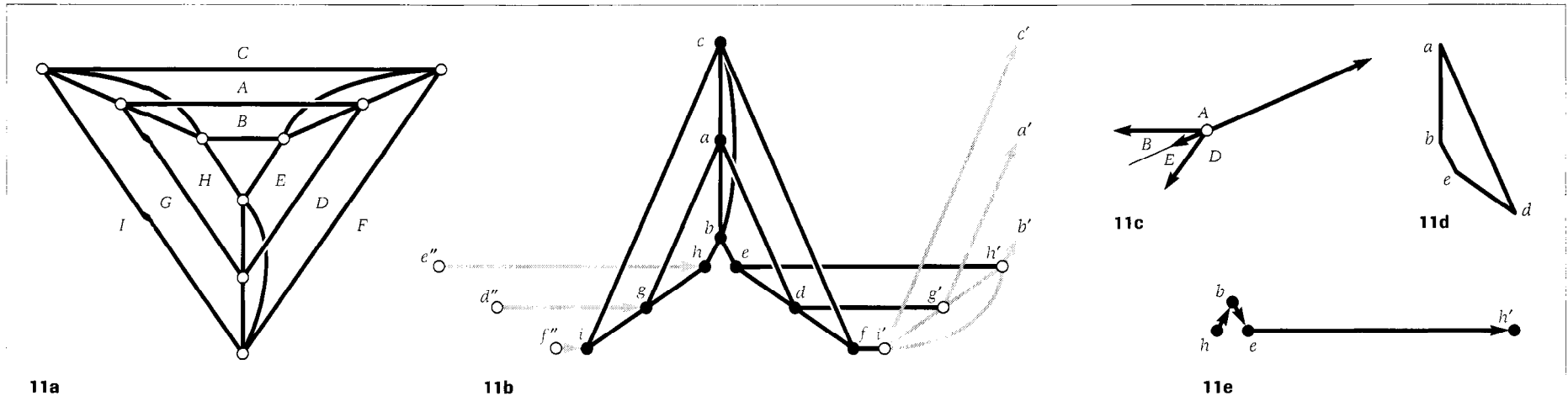
placement des barres ab et cd par les barres aq , bq , cq et dq possède un espace isomorphe d'autocontraintes (et de mouvements infinitésimaux).

Bien que ceci transforme le dessin général d'un graphe non-planaire en un graphe planaire — et nous permet d'utiliser les polyèdres sphériques pour la recherche d'autocontraintes — la méthode ne peut être appliquée à toutes les charpentes planes. La figure 12b montre une charpente avec le graphe non-planaire $K_{3,3}$ et une autocontrainte, mais les sommets coincidents empêchent toute application du théorème 3.6.

4. Surfaces spatiales polyédriques

Une seule surface polyédrique spatiale engendre la paire réciproque de charpentes pour un graphe planaire. La projection orthogonale des sommets et des arêtes de la surface polyédrique constitue l'une des figures, l'autre étant un diagramme formés par les normales aux faces.

- Définition 4.1. Le **diagramme des sommets** d'une surface polyédrique orientée $((V,F;E);Q)$ est la charpente plane construite sur la projection, avec le graphe $(V;E)$, et les points $p_i = (x_i, y_i, 0)$, si $q_i = (x_i, y_i, z_i)$.
- Définition 4.2. Le **diagramme des faces** d'une surface polyédrique orientée $((V,F;E);Q)$ est la charpente dont le graphe est $(F;E)$ et les points $P^j = (A^j, B^j, 0)$ pour F^j si $Q^j = (A^j, B^j, 1, C^j)$. Les points dans le diagramme des faces sont les intersections du plan $z=0$ avec les normales aux faces passant par le point



11a

11b

11c

11d

11e

and normals (13a), and a complete polyhedral surface with its vertical projection and face diagram (13b).

In the next theorem we will use a special polarity of projective 3-space. Since we will not need all the projective properties of such polarities, we give a restricted definition of this polarity.

■ Definition 4.3. The **Maxwell polarity** in space is the pair of transformations L and L^{-1} between points in R^3 , triples (xyz) , and non-vertical planes in R^3 , quadruples $(A,B,1,C)$, defined by $L(x,y,z) = (x,y,1,z)$ and $L^{-1}(A,B,1,C) = (A,B,C)$.

■ Definition 4.4. The Maxwell polarity preserves incidences: it takes a point q on a plane Q to a plane $L(q)$ through the point $L^{-1}(Q)$.

The Maxwell polarity takes a point q to a plane $L(q)$ through the point if and only if the point lies on the Maxwell paraboloid $x^2 + y^2 + 2z = 0$.

Proof. Assume we have a point q on a plane $Q: Ax + By + z + C = 0$. After transformation to $L(q)$ and $L^{-1}(Q)$ we have: $\alpha A + yB + C + z = 0$, so the new plane contains the new point.

If q lies on $L(q)$ we have $x^2 + y^2 + z + z = 0$, and the point lies on the paraboloid.

This is a restriction of a general projective polarity, which also exchanges points at infinity and vertical planes. In traditional language this is the polarity about the Maxwell paraboloid. Since the polarity preserves incidences, it takes a realiza-

$(0,0,-1)$. Ils sont, de façon équivalente, les opposés des gradients des faces planes traités comme des fonctions de x et y .

On montre, à la figure 13, la projection et la normale d'une seule arête (13a), et une surface polyédrique complète avec sa projection verticale et son diagramme de faces (13b).

On utilisera dans le théorème suivant une polarité spéciale de l'espace projectif tridimensionnel. Puisque nous n'aurons pas besoin de toutes les propriétés projectives de ces polarités, nous n'en donnerons qu'une définition restreinte.

■ Définition 4.3. La **polarité de Maxwell** dans l'espace est la paire de transformations L et L^{-1} entre les points de R^3 , les triplets (x,y,z) , et les plans non-verticaux dans R^3 , les quadruplets $(A,B,1,C)$, définies par $L(x,y,z) = (x,y,1,z)$ et $L^{-1}(A,B,1,C) = (A,B,C)$.

■ Proposition 4.4. La polarité de Maxwell préserve les incidences: elle transforme un point q du plan Q au plan $L(q)$ passant par le point $L^{-1}(Q)$.

La polarité de Maxwell transforme un point q en un plan $L(q)$ passant par le point si et seulement si le point se situe sur la paraboloid de Maxwell $x^2 + y^2 + 2z = 0$.

Démonstration. Supposons qu'un point q soit sur le plan $Q: Ax + By + z + C = 0$. Après la transformation en $L(q)$ et $L^{-1}(Q)$, on a: $\alpha A + yB + C + z = 0$, le nouveau plan contient ainsi le nouveau point.

Si q se situe sur $L(q)$, on a $x^2 + y^2 + z + z = 0$, et le point se situe sur le paraboloid.

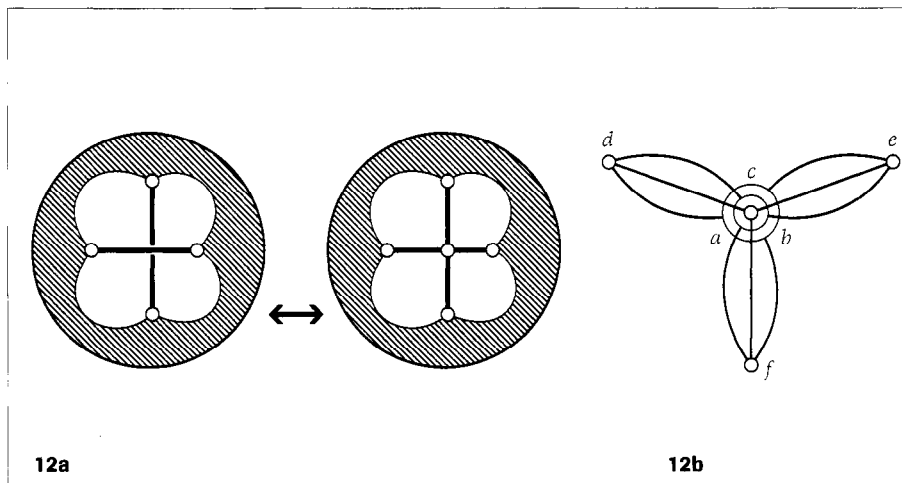
C'est une restriction d'une polarité projective générale, elle échange également les points à l'infini et les plans verticaux. En termes plus traditionnels, c'est la polarité qui concerne le paraboloid de Maxwell. Puisque la polarité préserve les incidences, elle transforme une réalisation d'un polyèdre orienté en une réalisation du polyèdre dual.

Rappelons que pour une pièce d'arête $e = \langle h,i;j,k \rangle$, le moment de rotation est $\mathbf{m}_e = \mathbf{p}_j \times \mathbf{p}_i$. De façon semblable, on a pour l'arête duale du réciproque $\mathbf{V}^e = (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j)$ et $\mathbf{M}^e = \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^j = (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j) \times \mathbf{P}^j$.

■ Théorème 4.5.

(a) Pour toute surface polyédrique $((V,F;E);p)$, le diagramme des sommets et le diagramme des faces constituent des charpentes réciproques.

Figure 12



12a

12b

tion of an oriented polyhedron into a realization of the dual polyhedron.

We recall that for an edge patch $e = \langle h, i, j, k \rangle$ the turning moment is $\mathbf{m}_e = \mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_j$. In a similar manner, for the dual edge in the reciprocal we have $\mathbf{V}^e = (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j)$ and $\mathbf{M}^e = \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^j = (\mathbf{P}^k - \mathbf{P}^j) \times \mathbf{P}^j$.

■ Theorem 4.5.

(a) For any polyhedral surface $((V, F; E); \mathbf{p})$ the vertex diagram and the face diagram are reciprocal frameworks.

(b) The dependencies induced by this reciprocal pair satisfy:

- (i) the vector condition: $\Sigma \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ and the moment condition $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$ (sum over face-edge cycles in the polyhedron),
- and (ii) the dual conditions: $\Sigma \omega^e \mathbf{V}^e = \mathbf{0}$ and $\Sigma \omega^e \mathbf{M}^e = \mathbf{0}$ (sum over vertex-edge cycles in the polyhedron).

Proof. (a) For each face F^j the vector $\mathbf{N}^j = (A^j, B^j, 1)$ is normal to the plane \mathbf{Q}^j . For each edge $e = \langle h, i, j, k \rangle$:

$$\begin{aligned} (x_h - x_i, y_h - y_i, z_h - z_i) &= (\mathbf{q}_h - \mathbf{q}_i) = \omega^e \mathbf{N}^j \times \mathbf{N}^k \\ &= \omega^e (B^j - B^k, A^k - A^j, A^j B^k - A^k B^j). \end{aligned} \quad (*)$$

This shows that:

$$-\omega^e (A^j - A^k, B^j - B^k)^\perp = (x_h - x_i, y_h - y_i) \text{ or } -\omega^e (\mathbf{V}^e)^\perp = \mathbf{v}_e.$$

The frameworks are reciprocal, with scalars ω^e for the self stress in the face diagram.

(b) Around any vertex-edge cycle of the polyhedron,

(b) Les dépendances induites par cette paire réciproque satisfont:

- (i) la condition vectorielle: $\Sigma \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ et la condition des moments $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur les cycles face-arête dans le polyèdre).
- et (ii) les conditions duales: $\Sigma \omega^e \mathbf{V}^e = \mathbf{0}$ et $\Sigma \omega^e \mathbf{M}^e = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur les cycles sommet-arête dans le polyèdre).

Démonstration. (a) Pour chaque face F^j , le vecteur $\mathbf{N}^j = (A^j, B^j, 1)$ est normal au plan \mathbf{Q}^j . Pour chaque arête $e = \langle h, i, j, k \rangle$:

$$\begin{aligned} (x_h - x_i, y_h - y_i, z_h - z_i) &= (\mathbf{q}_h - \mathbf{q}_i) = \omega^e \mathbf{N}^j \times \mathbf{N}^k \\ &= \omega^e (B^j - B^k, A^k - A^j, A^j B^k - A^k B^j). \end{aligned} \quad (*)$$

Ceci démontre que:

$$-\omega^e (A^j - A^k, B^j - B^k)^\perp = (x_h - x_i, y_h - y_i) \text{ ou } -\omega^e (\mathbf{V}^e)^\perp = \mathbf{v}_e.$$

Les charpentes sont réciproques; les ω^e sont les scalaires pour l'autocontrainte du diagramme des faces.

(b) Autour de tout cycle sommet-arête du polyèdre, $\Sigma (x_h - x_i, y_h - y_i, z_h - z_i) = \mathbf{0}$ à titre de somme vectorielle sur la surface polyédrique.

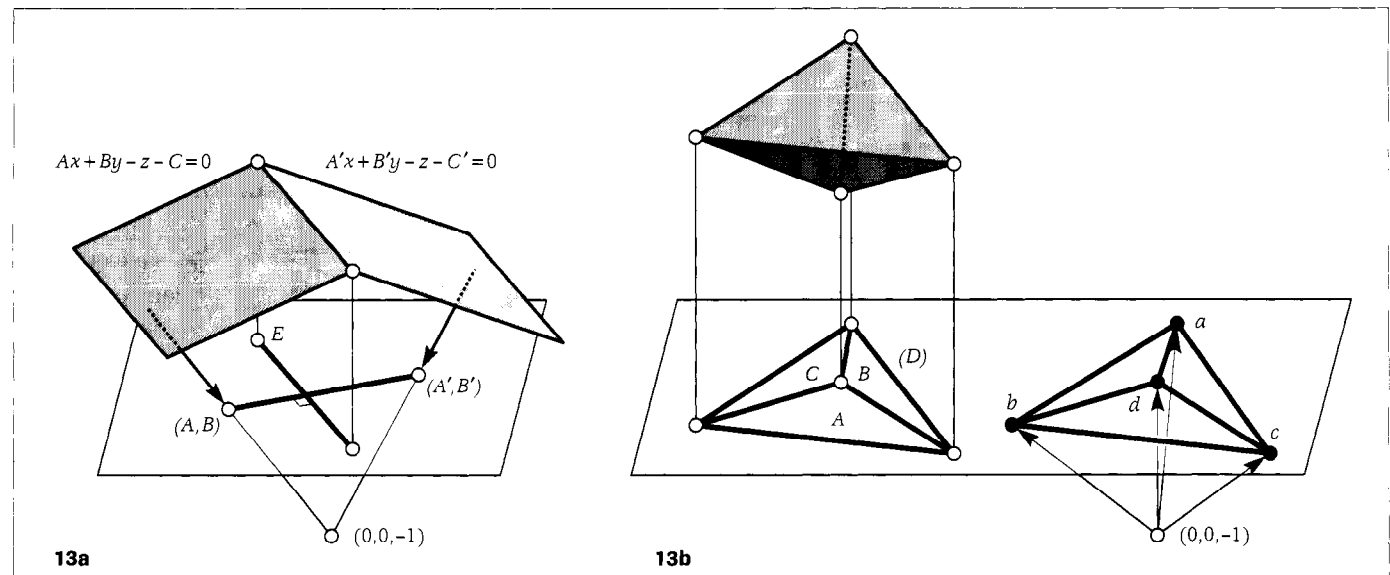
Pour toute arête $(x_h - x_i, y_h - y_i) = -\omega^e (A^j - A^k, B^j - B^k)^\perp = -\omega^e (\mathbf{V}^e)^\perp$. Ainsi, pour tout cycle sommet-arête dans le polyèdre d'origine, $\Sigma \omega^e \mathbf{V}^e = \Sigma \omega^e (x_h - x_i, y_h - y_i)^\perp = \mathbf{0}$.

De plus, $(z_h - z_i) = \omega^e (A^j B^k - A^k B^j) = -\omega^e (\mathbf{P}^j - \mathbf{P}^k) \times \mathbf{P}^j = \omega^e \mathbf{M}^e$. Ainsi, pour tout cycle sommet-arête du polyèdre d'origine (cycle « face duale-arête duale » du réciproque) $\Sigma \omega^e \mathbf{M}^e = \Sigma (z_h - z_i) = \mathbf{0}$.

Figure 13

For a spatial edge we have the projection perpendicular to the line of the gradients (13a). A complete spatial polyhedral surface projects orthogonally to a plane framework while the face normals, through a common point, section to a reciprocal framework.

Une arête spatiale est projetée de façon perpendiculaire aux droites des gradients (13a). Une surface polyédrique spatiale complète se projette de façon orthogonale en une charpente plane tandis que les normales des faces, en passant par un point commun, coupent une charpente réciproque.



13a

13b

$\Sigma(x_h - x_i, y_h - y_i, z_h - z_i) = \mathbf{0}$ as a vector sum on the polyhedral surface.

For any edge $(x_h - x_i, y_h - y_i) = -\omega^e(A^i - A^k, B^j - B^k)^\perp = -\omega^e(\mathbf{V}^e)^\perp$. Therefore, for any vertex-edge cycle in the original polyhedron, $\Sigma_e \omega^e \mathbf{V}^e = \Sigma_e \omega^e (x_h - x_i, y_h - y_i)^\perp = \mathbf{0}$.

In addition $(z_h - z_i) = \omega^e(A^j B^k - A^k B^j) = -\omega^e(\mathbf{P}^j - \mathbf{P}^k) \times \mathbf{P}^j = \omega^e \mathbf{M}^e$. Therefore, for any vertex-edge cycle in the original polyhedron (or dual-face—dual-edge cycle in the reciprocal)

$$\Sigma \omega^e \mathbf{M}^e = \Sigma(z_h - z_i) = \mathbf{0}.$$

It remains to show that $\Sigma \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ and $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$ for any face-edge cycle in the vertex diagram. We apply the Maxwell polarity. This makes the vertex diagram of the original polyhedral surface into the face diagram of the polar polyhedral surface. As a face diagram it must satisfy $\Sigma \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ and $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$.

We have a converse to this theorem.

■ Theorem 4.6. Given a reciprocal pair of plane frameworks $H = ((V;E); \mathbf{p})$ and $H^* = ((F;E); \mathbf{P})$ on the oriented combinatorial polyhedron $(V,F;E)$ the following are equivalent:

- (i) the reciprocal dependence in the original framework satisfies: $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$ (sum over face-edge cycles in the polyhedron);
- (ii) there is a polyhedral surface $((V,F;E); \mathbf{Q})$ with H as its vertical projection and H^* as its face diagram;

Il reste à démontrer que $\Sigma \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ et que $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$ pour tout cycle face-arête dans le diagramme des sommets. Il s'agit d'appliquer la polarité de Maxwell. Cela fait en sorte que le diagramme des sommets de la surface polyédrique d'origine devienne le diagramme des faces de la surface polyédrique polaire. À titre de diagramme de faces, il doit satisfaire $\Sigma \omega_e \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ et $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$.

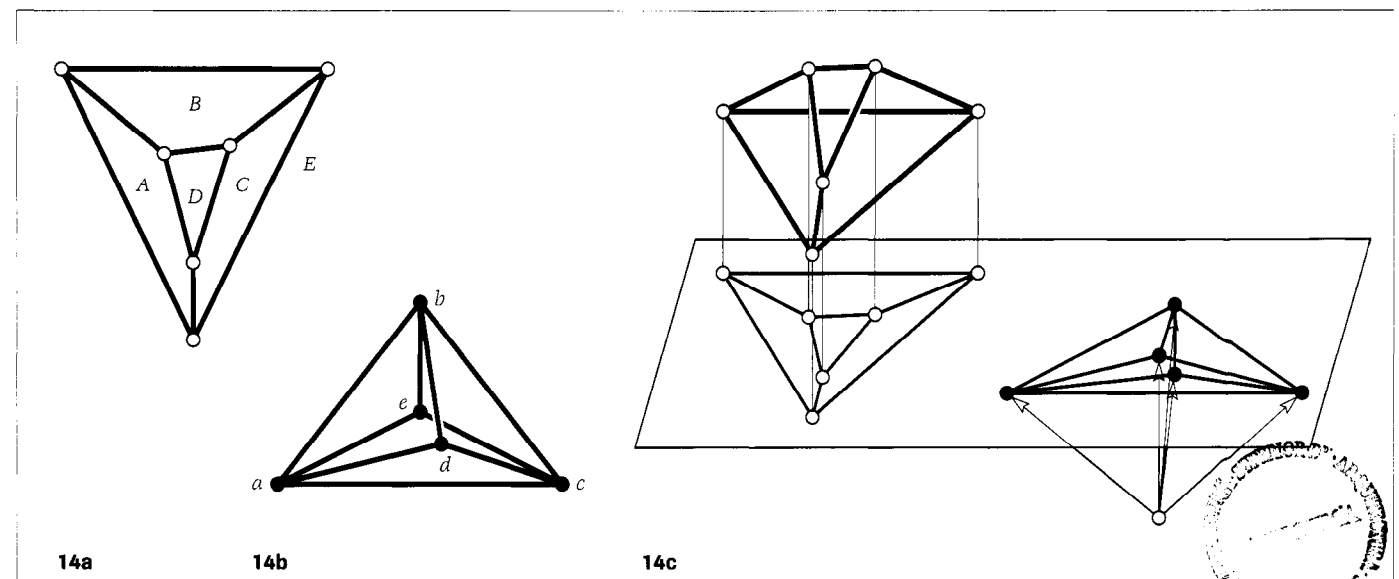
Il existe une réciproque à ce théorème.

■ Théorème 4.6. Étant donné une paire réciproque de charpentes planes $H = ((V;E); \mathbf{p})$ et $H^* = ((F;E); \mathbf{P})$ sur le polyèdre combinatoire orienté $(V,F;E)$, les énoncés suivants sont équivalents:

- (i) la dépendance réciproque dans la charpente d'origine satisfait : $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur les cycles face-arête dans le polyèdre);
- (ii) il existe une surface polyédrique $((V,F;E); \mathbf{Q})$ dont H est la projection verticale et H^* est le diagramme des faces;
- (iii) il existe une surface polyédrique polaire $((F,V;E); \mathbf{Q}^*)$ dont H^* est la projection verticale et H est le diagramme des faces;
- (iv) la dépendance dans la charpente réciproque satisfait l'équation : $\Sigma \omega^e \mathbf{M}^e = \mathbf{0}$ (somme effectuée sur les cycles sommet-arête dans le polyèdre).

Démonstration. On sait que (ii) \Rightarrow (iv) selon le théorème précédent.

Figure 14
Every reciprocal pair of frameworks on a planar graph (14a, 14b) are the projection and face diagram of a spatial polyhedron (14c).
Les charpentes d'une paire réciproque sur un graphe planaire (14a, 14b) sont la projection et le diagramme des faces d'un polyèdre spatial (14c).



14a

14b

14c

- (iii) there is a polar polyhedral surface $((F,V;E);Q^*)$ with H^* as its vertical projection and H as its face diagram;
- (iv) the dependence in the reciprocal framework satisfies the equation: $\sum \omega^e M^e = 0$ (sum over vertex-edge cycles in the polyhedron).

Proof. We know that (ii) \Rightarrow (iv) by the previous theorem.

(iv) \Rightarrow (ii). Choose a vertex p_0 and set $q_0 = (x_0, y_0, 0)$. For each face P^j we define $N^j = (A^j, B^j, 1)$, which will become its normal. We recall that

$$\omega^e N^j \times N^k = \omega^e (B^j - B^k, A^k - A^j, A^j B^k - A^k B^j) = (V^e) + (0, 0, M^e).$$

For every other point p_1 there is a vertex-edge path from v_0 to v_1 . We use this path to set:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + (\sum \omega^e N^j \times N^k) = (x_0, y_0, 0) + (\sum \omega^e V^e + (0, 0, \omega^e M^e)) \\ &= (x_0, y_0, 0) + \sum \omega^e V^e + \sum \omega^e M^e = (x_1, y_1, 0) + (0, 0, \sum \omega^e M^e). \end{aligned}$$

Since $\sum \omega^e M^e = 0$ on any vertex-edge cycle, z_1 is well defined.

We have now defined the edges of our polyhedral surface. It remains to prove that the edges of a face lie in a plane. For a face F^j the edges are formed by $\omega^e N^j \times N^k$ for various k , so they must lie in a plane with normal N^j . The points q_1 and these induced planes give the required polyhedral surface.

(ii) \Leftrightarrow (iii). This equivalence follows from an application of the Maxwell polarity to the given polyhedral surfaces.

(iii) \Leftrightarrow (i). This is the dual of (ii) \Leftrightarrow (iv), and follows by the same argument (applied to the dual combinatorial polyhedron).

(iv) \Rightarrow (ii). Choisissons un sommet p_0 et posons $q_0 = (x_0, y_0, 0)$. Pour chaque face P^j , on définit $N^j = (A^j, B^j, 1)$ dont elle sera la normale. Rappelons que

$$\omega^e N^j \times N^k = \omega^e (B^j - B^k, A^k - A^j, A^j B^k - A^k B^j) = (V^e) + (0, 0, M^e).$$

Pour tout autre point p_1 , il existe un chemin sommet-arête de v_0 à v_1 . Nous utilisons ce chemin pour poser:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + (\sum \omega^e N^j \times N^k) = (x_0, y_0, 0) + (\sum \omega^e V^e + (0, 0, \omega^e M^e)) \\ &= (x_0, y_0, 0) + \sum \omega^e V^e + \sum \omega^e M^e = (x_1, y_1, 0) + (0, 0, \sum \omega^e M^e). \end{aligned}$$

Puisque $\sum \omega^e M^e = 0$ sur tout cycle sommet-arête, z_1 est bien défini.

On a maintenant défini les arêtes de notre surface polyédrique. Il reste à montrer que les arêtes d'une face se situent dans un plan. Pour une face F^j , les arêtes sont formées par $\omega^e N^j \times N^k$ pour différents k , elles doivent donc se situer dans un plan dont la normale est N^j . Les points q_1 et ces plans induits nous donnent la surface polyédrique voulue.

(ii) \Leftrightarrow (iii). Cette équivalence est le résultat d'une application de la polarité de Maxwell aux surfaces polyédriques données.

(iii) \Leftrightarrow (i). Il s'agit du dual de l'implication (ii) \Leftrightarrow (iv), elle se démontre en utilisant les mêmes arguments (appliqués au polyèdre combinatoire dual).

■ Remarque 4.7

Toute la construction de la paire réciproque à partir de la surface polyédrique, de même que la reconstruction de la surface polyédrique à partir de la paire réciproque, est indépendante d'une translation verticale de la surface polyédrique. À partir d'une charpente, d'un polyèdre combinatoire orienté et d'une autocontrainte satisfaisant la condition, on a toute liberté en ce qui concerne le choix du premier point du réciproque (Q^0), et pour la hauteur du premier point de la surface polyédrique (z_0). En termes géométriques, on peut choisir la normale d'un plan quelconque et la hauteur d'un sommet quelconque. De façon équivalente, on peut librement choisir le plan pour une face quelconque.

■ Remarque 4.8

On peut, évidemment, construire directement le polyèdre spatial à partir de la charpente plane et d'une autocontrainte adéquate. Walter Whiteley [26] fournit une version de cette démonstration.

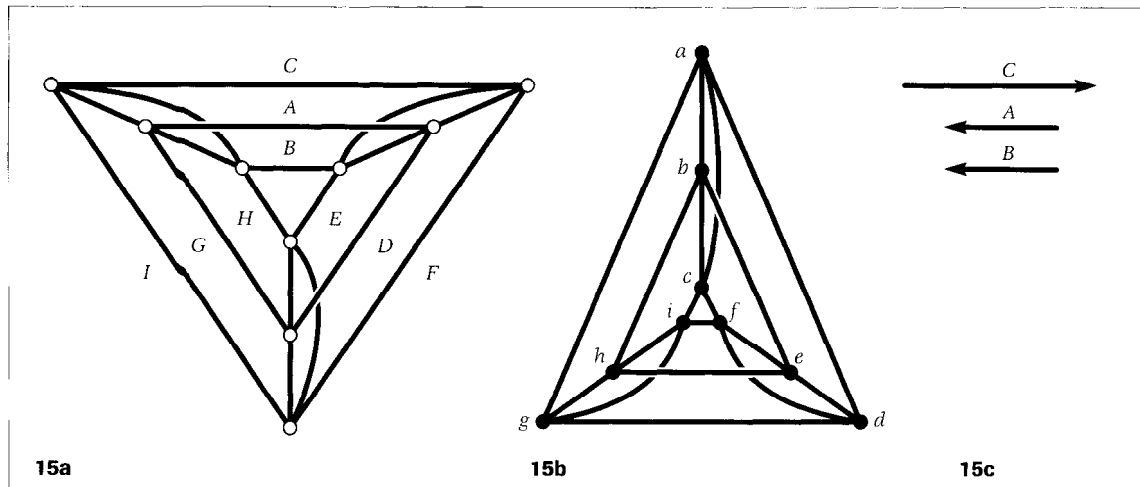
■ Exemple 4.9

Dans la figure 14a, on peut voir le dessin plan d'un polyèdre

Figure 15

This reciprocal pair of frameworks for a toroidal combinatorial polyhedron (15a, 15b) define a self stress (15c) which fails the moment condition and cannot correspond to a polyhedral surface.

Cette paire réciproque de charpentes pour un polyèdre combinatoire torique (15a, 15b) définit une autocontrainte (15c) qui ne satisfait pas la condition des moments et ne peut correspondre à une surface polyédrique.



15a

15b

15c

■ Remark 4.7

The entire construction of the reciprocal pair from the polyhedral surface, and the reconstruction of the polyhedral surface from the reciprocal pair, is independent of a vertical translation of the polyhedral surface. From a framework, a combinatorial oriented polyhedron, and a self stress satisfying the condition, we have a free choice for the first point of the reciprocal (\mathbf{Q}^0), and for the height of the first point of the polyhedral surface (z_0). In geometric terms, we can choose the normal to any one plane, and the height of any one vertex. Equivalently, we can freely choose the plane for any one face.

■ Remark 4.8

We can, of course, construct the spatial polyhedron directly from the plane framework and an appropriate self stress. Whiteley [26] gives one version of this proof.

■ Example 4.9

In **Figure 14a** we show a plane drawing of a spherical polyhedron (**14a**) and its reciprocal (**14b**). In **Figure 14c** we show the corresponding polyhedral surface, with a perspective drawing of the picture and the reciprocal in the xy -plane.

■ Example 4.10

In **Figure 15** we show a toroidal framework (**15a**) which has a reciprocal diagram (**15b**). In the resulting self stress, the three vectors around the cycle ABC are shown in **Figure 15c**. As placed, they clearly form a static couple, which does not satisfy the moment condition $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$. Thus the framework and reciprocal do not correspond to a spatial polyhedral surface. In the second paper we will define a more complete reciprocal figure which does guarantee the existence of a polyhedral surface.

For planar graphs and spherical polyhedral surfaces the path condition on any dependence follows from Theorem 2.5. This gives the following simpler result. This is essentially the original theorem of Maxwell [1864].

■ Corollary 4.11. *Given a plane framework with an associated combinatorial spherical polyhedron $(V, F; E)$ the following are equivalent:*

- (i) *there is a self stress on the framework with all $\omega_e \neq 0$;*
- (ii) *there is a reciprocal framework on the dual graph $(F; E)$;*
- (iii) *there is a spatial polyhedron $((V, F; E); \mathbf{Q})$ with the framework as its vertical projection (and the reciprocal as its face diagram).*

sphérique (**14a**) et son réciproque (**14b**). La **figure 14c** illustre la surface polyédrique correspondante, avec un dessin en perspective de l'image et le réciproque dans le plan xy .

■ Exemple 4.10

À la **figure 15**, on montre une charpente torique (**15a**) qui possède un diagramme réciproque (**15b**). Dans l'autocontrainte résultante, les trois vecteurs autour du cycle ABC sont illustrés à **figure 15c**. Tels que placés, ils constituent clairement un couple statique qui ne satisfait pas la condition des moments $\Sigma \omega_e \mathbf{m}_e = \mathbf{0}$. La charpente et son réciproque, ainsi, ne correspondent pas à une surface polyédrique spatiale. Dans le second article, on définira une figure réciproque plus complète qui assurera l'existence d'une surface polyédrique.

Pour les graphes planaires et les surfaces polyédriques sphériques la condition des chemins sur toute dépendance est une conséquence du théorème 2.5. Cela nous donne le résultat plus simple suivant. C'est, essentiellement, le théorème original de Maxwell [1864].

■ Corollaire 4.11. *Étant donné une charpente plane et un polyèdre combinatoire sphérique qui lui est associé $(V, F; E)$, les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *il existe, pour la charpente, une autocontrainte dont tous les ω_e sont non-nuls ;*
- (ii) *il existe une charpente réciproque sur le graphe dual $(F; E)$;*
- (iii) *il existe un polyèdre spatiale $((V, F; E); \mathbf{Q})$ dont la charpente est la projection verticale (et le réciproque est son diagramme de faces).*

Bibliography / Bibliographie

- [1] Ash P, Bolker E., Crapo H. & Whiteley W. (1985). "Convex polyhedra, Dirichlet tessellations and spider webs." In *Shaping Space: A Polyhedral Approach*, G. Fleck and M. Senechal eds, Birkhauser Boston, 231-250.
- [2] Aurenhammer F. (1987). "Recognizing polytopal cell complexes and constructing projection polyhedra." *J. Symbolic Computation* 3.
- [3] Bow R. (1873). *Economics of Construction in Relation to Framed Structures*. E and F.N. Spon, London.
- [4] Charleton T.M. (1982). *A History of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge University Press.
- [5] Connelly R. (1982). "Energy and Rigidity." *Inventiones Mathematicae* 66, 11-33.
- [6] Connelly R. (1988). "Rigid Circle and Sphere Packings I." *Structural Topology* 13, 43-60
- [7] Connelly R. (1990). "Rigid Circle and Sphere Packings II." *Structural Topology* 16, 57-76.
- [8] Crapo H. & Whiteley W. (1982). "Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures: a Projective Geometric Introduction." *Structural Topology* 6, 43-82.
- [9] Crapo H. & Whiteley W. (1992). "Plane self stresses and projected polyhedra III: non-spherical surfaces." Preprint Dept. of Math & Stats, York University, North York, Ont.
- [10] Cremona L. (1872). *Graphical Statics*. English translation, Oxford University Press London 1890.
- [11] Culmann C. (1866). *Die Graphische Statik*. Meyer and Zeller, Zurich.
- [12] Edelsbrunner H. & Seidel R. (1985). "Voronoi Diagrams and Arrangements." *Proceedings of the ACM Symposium on Computational Geometry*, Baltimore, 251-262.
- [13] Henneberg L. (1911). *Die Graphische Statik der Starren Systeme*. Leipzig 1911, Johnson Reprint 1968.
- [14] Huffman D. (1977). "A Duality Concept for the Analysis of Polyhedral Scenes." In *Machine Intelligence*, E.W. Elcock and D. Michie eds, John Wiley, New York, 475-492.
- [15] Jenkins F. (1869). "On the Practical Application of Reciprocal Figures to the Calculation of Strains on Frameworks." *Trans. Royal Soc. Edinburgh* 25, 441-447.
- [16] Kanade T. (1980). "A Theory of Origami World." *Artificial Intelligence* 13, 279-311.
- [17] Mackworth A.K. (1973). "Interpreting pictures of polyhedral pictures." *Artificial Intelligence* 4, 121-137
- [18] Maxwell J.C. (1864). "On Reciprocal Diagrams and Diagrams of Forces." *Phil. Mag. Series* 4, 27, 250-261
- [19] Maxwell J.C. (1870). "On Reciprocal Diagrams, Frames and Diagrams of Forces." *Trans. Royal Soc. Edinburgh* 26 (1869-72), 1-40.
- [20] Maxwell J.C. (1876). "On Bow's Method of Drawing Diagrams in Graphical Statics, with Illustrations from Peaucellier's linkage." *Proc. Camb. Phil. Soc.* 2, 407-414.
- [21] Roth B. & Whiteley W. (1981). "Rigidity of Tensegrity Frameworks." *Trans. Amer. Math. Soc.* 265, 419-445.
- [22] Sugihara K. (1983). "A Unifying Approach to Descriptive Geometry and Mechanisms." *Disc. Appl. Math.* 5, 313-328.
- [23] Sugihara K. (1984). "An Algebraic and Combinatorial Approach to the Analysis of Line Drawings of Polyhedra." *Discrete Applied Math* 9.
- [24] Sugihara K. (1986). *The Machine Interpretation of Line Drawings*. MIT Press Cambridge Mass.
- [25] White N. & Whiteley W. (1983). "The Algebraic Geometry of Stresses in Frameworks." *SIAM J. Alg. & Disc. Meth.* 4, 481-511.
- [26] Whiteley W. (1982). "Motions and Stresses of Projected Polyhedra." *Structural Topology* 7, 13-38.
- [27] Whiteley W. (1985). "Parallel Redrawings of Configurations in 3-space." Preprint Champlain Regional College, St. Lambert Quebec.
- [28] Whiteley W. (1988). "Some Matroids on Hypergraphs, with Applications to Scene Analysis and Geometry." *Disc. Comp. Geometry* 4, 75-95.
- [29] Whiteley W. (1991). "Weavings, Sections and Projections of Spherical Polyhedra." *Discrete Applied Math* 33, 275-294.