



VERTEX SPLITTING IN ISOSTATIC FRAMEWORKS

Walter Whiteley

Champlain Regional College
900 Riverside Drive
St. Lambert, Québec
Canada J4P 3P2

Work supported, in part, by grants from FCAR (Québec) and NSERC (Canada).

Travaux subventionnés, en partie, par le FCAR du Québec et le CRSNG du Canada.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

ABSTRACT

We show that vertex splits on 0, 1, or 2 edges of a bar and joint framework in 3-space preserve independence for almost all positions of the new vertex. As a corollary, we show that vertex splits on 2 edges of a framework in 3-space preserve static rigidity for almost all positions of the new vertex. This technique is applied to the generic rigidity of triangulated surfaces in 3-space, including all spheres and projective planes. Analogues for n -space are given for all n .

1. INTRODUCTION

In a recent paper with Tiong-Seng Tay [6] we analysed inductive methods for generating larger isostatic frameworks in 3-space from smaller isostatic frameworks by inserting one additional vertex. Faced with basic unsolved problems for 5-valent (and higher valent) vertices we presented certain partial results (see **Figure 1** for a relevant example).

Here we offer a simple technique for splitting an existing vertex along 0, 1, or 2 edges in 3-space (**Figure 2**). We begin with a graph-theory definition of vertex splitting.



LA DIVISION DE SOMMET DANS LES CHARPENTES ISOSTATIQUES

RÉSUMÉ

On démontre que des divisions de sommet le long de 0, 1 ou 2 arêtes d'une charpente de barres et de joints dans l'espace tridimensionnel respectent l'indépendance pour presque toutes les positions du nouveau sommet. On démontre, en corollaire, que les divisions de sommet le long de 2 arêtes d'une charpente dans l'espace tridimensionnel préservent la rigidité statique pour presque toutes les positions du nouveau sommet. On applique cette technique à la rigidité générique des surfaces triangulées dans l'espace tridimensionnel, incluant toutes les sphères et les plans projectifs. Des analogues sont énoncés pour les espaces à n dimensions.

1. INTRODUCTION

Dans un récent article, écrit en collaboration avec Tiong-Seng Tay [6], on a procédé à l'analyse des méthodes inductives de génération de plus grandes charpentes isostatiques dans l'espace tridimensionnel à partir de plus petites charpentes isostatiques par l'ajout d'un sommet additionnel. Face à des problèmes de base non résolus au sujet des sommets de degré 5 (et de degré supérieur), on a présenté certains résultats partiels (voir la **figure 1** pour un exemple pertinent).

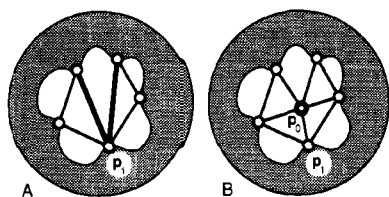


FIGURE 1

An established principle for inserting a 5-valent joint in place of two bars forming a V.

Un principe déjà établi pour l'ajout d'un sommet de degré 5 en remplacement de deux barres formant un V.

Definition 1

Given a graph G with a vertex p_i incident to the edges $(1,2), \dots, (1,j), (1,j+1), \dots, (1,k), (1,k+1), \dots, (1,k+m)$, then a **vertex split** of p_i on the j edges $(1,2), \dots, (1,j)$ is the modified graph with edges $(1,k+1), \dots, (1,k+m)$ removed and an added vertex p_0 incident with new edges $(0,2), \dots, (0,j), (0,k+1), \dots, (0,k+m)$.

We show that, for generic positions of the new vertex in 3-space, such a split along 0, 1 or 2 edges does not increase the space of static self-stresses. Hence the 2-edge split, which adds one vertex and 3 edges, must preserve static rigidity of the framework, for generic positions of the added vertex.

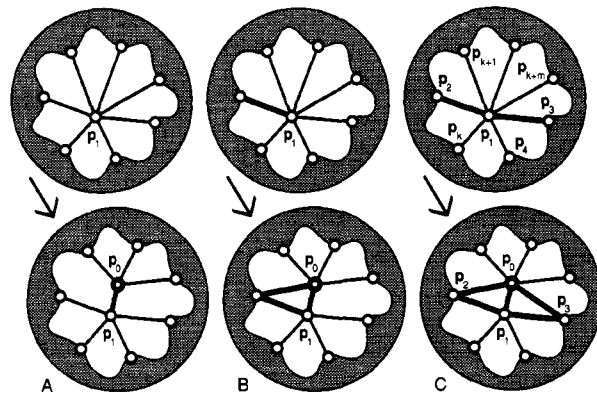
This technique is particularly suited to the creation of large triangulated 2-manifolds from smaller triangulated 2-manifolds ([4], [5], [6], [7], [8], [9]). We offer a new reduction as a step toward proving the conjecture that the graph of a triangulated 2-manifold without boundary is generically rigid in 3-space (Section 3).

Recently, Allan Fogelsanger has combined our induction step with delicate homological arguments to verify this conjecture [3].

FIGURE 2

A vertex split on 0 (A), 1 (B) or 2 (C) non-coplanar bars in a framework preserves static independence of the framework.

Une division de sommet le long de 0 (A), 1 (B) ou 2 (C) barres non coplanaires dans une charpente préserve l'indépendance statique de la charpente.



Nous offrons ici une technique simple pour diviser un sommet existant le long de 0, 1 ou 2 arêtes dans l'espace tridimensionnel (figure 2). Débutons par une définition de la division de sommet extraite de la théorie des graphes.

Définition 1

Soit un graphe G possédant un sommet p_i incident aux arêtes $(1,2), \dots, (1,j), (1,j+1), \dots, (1,k), (1,k+1), \dots, (1,k+m)$; on appellera alors une **division de sommet** de p_i sur les j arêtes $(1,2), \dots, (1,j)$ le graphe modifié par le retrait des arêtes $(1,k+1), \dots, (1,k+m)$ et l'ajout d'un sommet p_0 incident aux nouvelles arêtes $(0,2), \dots, (0,j), (0,k+1), \dots, (0,k+m)$.

On montre que, pour les positions génériques du nouveau sommet dans l'espace tridimensionnel, une telle division le long de 0, 1 ou 2 arêtes n'accroît pas l'espace des autocontraintes statiques. Ainsi, la division sur deux arêtes qui ajoute un sommet et 3 arêtes doit préserver la rigidité statique de la charpente pour les positions génériques du nouveau sommet.

Cette technique convient particulièrement à la création de grandes variétés bidimensionnelles triangulées à partir de variétés bidimensionnelles triangulées plus petites ([4], [5], [6], [7], [8], [9]). On propose enfin une nouvelle réduction comme un pas vers la démonstration de la conjecture affirmant que le graphe d'une variété bidimensionnelle triangulée sans bord est génériquement rigide dans l'espace à 3 dimensions (Section 3).

Récemment, Allan Fogelsanger a combiné notre étape d'induction avec de délicats arguments d'homologie pour vérifier cette conjecture [3].

2. THE BASIC RESULT

We use the notation and definitions of [6].

Proposition 1

Given an independent framework $G(\mathbf{p})$ in 3-space with a joint \mathbf{p}_1 , and all incident bars $(1,2), (1,3), \dots, (1,k), (1,k+1), \dots, (1,k+m)$ with $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ not parallel to $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$, then for any $k+m \geq 2$, the new framework with bars $(1,k+1), \dots, (1,k+m)$ removed and an added joint \mathbf{p}_0 incident with new bars $(0,2), (0,3), (0,k+1), \dots, (0,k+m)$ is independent for almost all positions for the new joint \mathbf{p}_0 .

Proof

We choose, as a limiting initial case, to add \mathbf{p}_0 at \mathbf{p}_1 , with the "bar" $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ assigned a direction \mathbf{d}_{01} not in the plane of $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ and $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$. This is not a bar and joint framework, but it is a 3-frame with a rigidity matrix — and it is the limit of frameworks with variable \mathbf{p}_0 ([2], [10]). Assume there is a self-stress $(\dots, \omega_{ij}, \dots)$ on the new framework. This will reduce to a self-stress $(\dots, \omega'_{ij}, \dots)$ satisfying $\sum \omega'_{ij} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_j) = \mathbf{0}$ on the previous framework if we set $\omega'_{12} = \omega_{02} + \omega_{12}$, $\omega'_{13} = \omega_{03} + \omega_{13}$, $\omega'_{1k+i} = \omega_{0k+i}$ and drop ω_{12} . By our hypothesis, all $\omega'_{ij} = 0$. Thus we have around \mathbf{p}_1 :

$$\omega_{12}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \omega_{13}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + \omega_{01}\mathbf{d}_{01} = \mathbf{0}$$

which requires $\omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{01} = 0$ if the three directions are not coplanar. By a similar argument at \mathbf{p}_0 , $\omega_{02} = \omega_{03} = 0$. We conclude that this self-stress is also trivial. A small change in the position for \mathbf{p}_0 leads to nearby bar and joint frameworks which preserve the independence of the rows of the rigidity matrix.

Figure 2 illustrates such a vertex split on 0, 1 or 2 edges (**Figures 2A, 2B, and 2C** respectively). We have the following corollary to the proof.

2. LE RÉSULTAT FONDAMENTAL

Nous utiliserons les notations ainsi que les définitions de [6].

Proposition 1

Soient $G(\mathbf{p})$ une charpente indépendante dans l'espace à trois dimensions, \mathbf{p}_1 , l'un de ses joints et $(1,2), (1,3), \dots, (1,k), (1,k+1), \dots, (1,k+m)$, toutes les barres incidentes à \mathbf{p}_1 où $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ n'est pas parallèle à $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$. Alors pour toute valeur $k+m \geq 2$, la nouvelle charpente obtenue en supprimant les barres $(1,k+1), \dots, (1,k+m)$ et en ajoutant un joint additionnel \mathbf{p}_0 incident aux nouvelles barres $(0,2), (0,3), (0,k+1), \dots, (0,k+m)$ est indépendante pour presque toutes les positions du nouveau joint \mathbf{p}_0 .

Démonstration

On choisit, comme cas limite initial, de lier \mathbf{p}_0 à \mathbf{p}_1 et d'assigner à la «barre» $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ une direction \mathbf{d}_{01} qui ne se situe pas dans le plan de $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ et $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$. Ce n'est pas une structure de barres et de joints, mais c'est une charpente tridimensionnelle possédant une matrice de rigidité — c'est, de plus, la limite des charpentes de variable \mathbf{p}_0 ([2], [10]). Supposons que la nouvelle charpente possède une autocontrainte $(\dots, \omega_{ij}, \dots)$. Elle se réduira à une autocontrainte $(\dots, \omega'_{ij}, \dots)$ satisfaisant $\sum \omega'_{ij} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_j) = \mathbf{0}$ sur la charpente initiale si l'on pose $\omega'_{12} = \omega_{02} + \omega_{12}$, $\omega'_{13} = \omega_{03} + \omega_{13}$, $\omega'_{1k+i} = \omega_{0k+i}$ et on laisse tomber ω_{12} . Selon notre hypothèse, tous les ω'_{ij} sont nuls. Ainsi, autour de \mathbf{p}_1 , on a :

$$\omega_{12}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \omega_{13}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + \omega_{01}\mathbf{d}_{01} = \mathbf{0}$$

ce qui demande que $\omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{01} = 0$ si les trois directions ne sont pas coplanaires. Selon un argument similaire en \mathbf{p}_0 , $\omega_{02} = \omega_{03} = 0$. On en conclut que cette autocontrainte est également triviale. Une légère variation de la position de \mathbf{p}_0 mène à des charpentes de barres et de joints voisines tout en préservant l'indépendance des lignes de la matrice de rigidité.

La **figure 2** illustre une telle division de sommet le long de 0, 1 ou 2 arêtes (**figures 2A, 2B et 2C** respectivement). On peut énoncer le corollaire suivant.

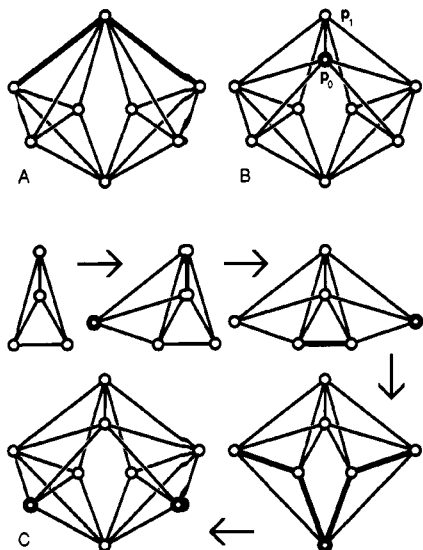


FIGURE 3

A dependent flexible framework (A) can be transformed to an isostatic framework (B) by a vertex split on two edges. Figure 3C shows that B is isostatic.

Une charpente dépendante flexible (A) peut être transformée en une charpente isostatique (B) par une division de sommet le long de deux arêtes. La figure 3C montre que B est isostatique.

Corollaire 2

Given an independent framework $G(\mathbf{p})$ in 3-space with a joint \mathbf{p}_1 , the new framework formed by splitting this joint into \mathbf{p}_0 and \mathbf{p}_1 on 0, or 1 edge is independent for almost all positions for the new joint \mathbf{p}_0 .

Corollaire 3

Given a framework $G(\mathbf{p})$ in 3-space with a joint \mathbf{p}_1 with a space of static self-stresses of dimension m then the new framework formed by a vertex split on 2 non-parallel bars has a space of self-stresses of dimension $\leq m$ for almost all positions of the added joint \mathbf{p}_0 .

Proof

The proof of Proposition 1 showed that self-stresses on the modified framework with \mathbf{p}_0 at \mathbf{p}_1 transform linearly to self-stresses on the original framework $G(\mathbf{p})$. Moreover if two self-stresses reduce to the same self-stress on $G(\mathbf{p})$, then they differ at most on $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$. By the previous argument applied to the difference of these self-stresses, the difference is zero, and the linear transformation is an injection.

Since a vertex split on 2 edges adds 1 vertex and 3 bars, we have a final result.

Corollaire 4

Given a statically rigid framework $G(\mathbf{p})$ in 3-space with a joint \mathbf{p}_1 , then the new framework formed by a vertex split on 2 non-parallel bars is statically rigid for almost all positions of the added joint \mathbf{p}_0 .

We note that the converse is not true. If we split a vertex on two edges, we can turn a generically non-rigid graph into a generically rigid graph (Figures 3A and 3B).

Corollaire 2

Étant donné une charpente tridimensionnelle indépendante $G(\mathbf{p})$ possédant un sommet \mathbf{p}_1 , la nouvelle charpente construite par division de ce sommet en \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 le long de 0 ou 1 arête est indépendante pour presque toutes les positions du nouveau sommet \mathbf{p}_0 .

Corollaire 3

Étant donné une charpente tridimensionnelle $G(\mathbf{p})$ possédant un sommet \mathbf{p}_1 et un espace d'autocontraintes statiques de dimension m , alors la nouvelle charpente construite par division de sommet le long de deux barres non parallèles possède un espace d'autocontraintes de dimension $\leq m$ pour presque toutes les positions du sommet additionnel \mathbf{p}_0 .

Démonstration

La démonstration de la proposition 1 montre que les autocontraintes sur la charpente modifiée avec \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 se transforment de façon linéaire en des autocontraintes sur la charpente initiale $G(\mathbf{p})$. De plus, si deux autocontraintes se réduisent à la même autocontrainte sur $G(\mathbf{p})$, elles ne diffèrent alors au plus que par $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$. En appliquant l'argument précédent à la différence de ces autocontraintes, on obtient que la différence est nulle et que la transformation linéaire est une injection.

Puisqu'une division de sommet le long de deux arêtes implique l'ajout d'un sommet et de trois barres, on a le résultat final.

Corollaire 4

Étant donné une charpente tridimensionnelle statiquement rigide $G(\mathbf{p})$ possédant un sommet \mathbf{p}_1 , la nouvelle charpente construite par une division de sommet le long de deux barres non parallèles est alors statiquement rigide pour presque toutes les positions du sommet additionnel \mathbf{p}_0 .

On remarque que la réciproque n'est pas vraie. Si on effectue une division de sommet le long de deux arêtes, on peut transformer un graphe génériquement non rigide en un graphe génériquement rigide (figures 3A et 3B).

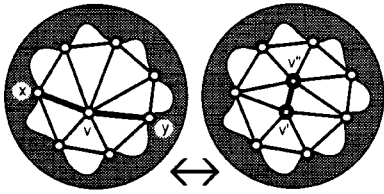


FIGURE 4

Splitting a vertex and shrinking an edge which is only part of facial triangles are inverse operations on a triangulated 2-manifold.

La division d'un sommet et la contraction d'une arête qui n'appartient qu'à des triangles de faces sont des opérations inverses sur une variété bidimensionnelle triangulée.

3. REDUCTION OF TRIANGULATED 2-MANIFOLDS

In a triangulated 2-manifold we can split any vertex along two edges and create a larger triangulated 2-manifold of the same topological type. This can be reversed, by shrinking an edge $p_0 p_1$ and identifying the vertices — provided that this edge is not part of a non-facial triangle of the surface (Figure 4), or the 2-manifold is not the tetrahedron.

Barnette [1] gives a basic introduction to this process. We begin with his definition of vertex splitting for manifolds.

Definition 2

Let v be a vertex of a triangulation T of a 2-manifold. The **star** of v is the union of the triangles meeting v , and the **link** of v is the simple polygon of edges in the star which do not contain v . The link can be split into two simple paths A and B , meeting at vertices x and y .

A **vertex split** of the triangulation T at the vertex v consists of replacing the triangles of the star of v by two new vertices v' and v'' and the triangles determined by v' and the edges of A , v'' and the edges of B , and the two triangles $v'v''x$, $v'v''y$.

Definition 3

An edge of a triangulated 2-manifold is **short** if it is in a non-facial triangle of the surface. Otherwise the edge is **shrinkable**.

A triangulated 2-manifold is **short** if every edge of the 2-manifold is short, or it is the tetrahedron.

Proposition 5

Every triangulated 2-manifold of a given topological type is generically rigid if and only if every short triangulated 2-manifold of this topological type is generically rigid.

Proof

Assume that the smallest triangulated 2-manifold P of a given topological type which is not generically rigid is not short. We can find an edge $v'v''$ to contract to v . Since the edge is not short, this creates a smaller triangulated 2-manifold of the same topo-

3. RÉDUCTION DES VARIÉTÉS BIDIMENSIONNELLES TRIANGULÉES

Dans une variété bidimensionnelle triangulée on peut effectuer la division de n'importe quel sommet le long de deux arêtes et créer une plus grande variété bidimensionnelle triangulée de même type topologique. On peut renverser le processus en contractant une arête $p_0 p_1$ et en identifiant les sommets — en autant que cette arête n'appartienne pas à un triangle qui ne soit pas une face de la surface (figure 4), ou que la variété bidimensionnelle ne soit pas le tétraèdre.

On trouve dans Barnette [1] une introduction aux fondements de ce processus. Débutons par sa définition de la division de sommet pour les variétés.

Définition 2

Soit v un sommet d'une triangulation T d'une variété bidimensionnelle. L'**étoile** de v est l'union des triangles adjacents à v , et le **lien** de v est le polygone simple constitué des arêtes de l'étoile ne contenant pas v . Le lien peut être divisé en deux chemins simple A et B se rencontrant en des sommets x et y .

Une **division de sommet** de la triangulation T au sommet v s'effectue par le remplacement des triangles de l'étoile de v par deux nouveaux sommets v' et v'' et les triangles déterminés par v' et les arêtes de A , v'' et les arêtes de B , et les deux triangles $v'v''x$, $v'v''y$.

Définition 3

On dira qu'une arête de la variété bidimensionnelle triangulée est **courte** si elle appartient à un triangle qui n'est pas une face de la surface. Autrement, on dira que l'arête est **contractile**.

Une variété bidimensionnelle triangulée est dite **courte** si toutes ses arêtes sont courtes ou s'il s'agit du tétraèdre.

Proposition 5

Toutes les variétés bidimensionnelles triangulées d'un type topologique donné sont génériquement rigides si et seulement si toutes les variétés bidimensionnelles triangulées courtes de ce type topologique sont génériquement rigide.

logical type. By our assumption, this smaller triangulated 2-manifold is generically rigid. For any statically rigid realization we can split the vertex v to create a statically rigid realization of P' . We conclude that if a counterexample exists, then a short counterexample must exist.

An old lemma of Steinitz shows that the only short triangulated sphere is the tetrahedron, which yields a quick proof that all triangulated spheres are generically rigid (compare with [4], [6]). We give a simple proof of this due to [1].

Lemma 6

If a triangulation T of a 2-manifold has a non-facial triangle which separates a disc, then there is a shrinkable edge inside this triangle.

Proof

We prove this by induction on the number N of interior vertices in the disc. If $N = 1$, the vertex is 3-valent, and every edge is shrinkable.

Assume the result holds for $N = k$. If a cap has $k+1$ vertices, then there is an interior edge e . If e is shrinkable, we are finished. Otherwise e is part of a non-facial triangle — which separates the disc, with the base triangle on one side. The other component is a triangulated disc with fewer interior vertices, which must contain a shrinkable edge, by the induction hypothesis.

Corollary 7

Every triangulated sphere is generically rigid in 3-space.

Proof

Consider any edge e in triangulated sphere larger than a tetrahedron. Either this is shrinkable, or it is part of a non-facial triangle separating a disc. By Lemma 6, there is a shrinkable edge in this disc. We conclude that the tetrahedron is the only short triangulated sphere. Since this is generically rigid in 3-space, all triangulated spheres are generically rigid.

Démonstration

Supposons que la plus petite variété bidimensionnelle triangulée P d'un type topologique donné qui ne soit pas génériquement rigide, n'est pas courte. On peut trouver une arête $v'v''$ pour effectuer une contraction en v . Puisque l'arête n'est pas courte, ceci crée une variété bidimensionnelle triangulée plus petite et du même type topologique. Selon notre hypothèse, cette plus petite variété bidimensionnelle triangulée est génériquement rigide. Pour toute réalisation statiquement rigide, on peut diviser le sommet v pour créer une réalisation statiquement rigide de P' . On conclut que si un contre-exemple existe, alors un contre-exemple court doit exister.

Un vieux lemme de Steinitz montre que la seule sphère triangulée courte est le tétraèdre, ce qui établit une preuve rapide que toutes les sphères triangulées sont génériquement rigides (on peut comparer avec [4], [6]). On en donne ici une preuve simple dont la paternité va à [1].

Lemme 6

Si une triangulation T d'une variété bidimensionnelle possède un triangle qui n'est pas une face et qui sépare un disque, alors il existe, à l'intérieur de ce triangle, une arête contractile.

Démonstration

On établira la preuve par induction sur le nombre N de sommets à l'intérieur du disque. Si $N = 1$, le sommet est de degré 3 et toute arête est contractile.

Supposons que le résultat soit valide pour $N = k$. Si un bonnet possède $k+1$ sommets, il existe alors une arête intérieure e . Si e est contractile, le résultat est établi. Sinon, e appartient à un triangle qui n'est pas une face — ce triangle sépare le disque, le triangle initial se trouvant d'un côté. L'autre composante est un disque triangulé possédant moins de sommets intérieurs et qui, selon notre hypothèse d'induction, doit contenir une arête contractile.

Corollaire 7

Toute sphère triangulée est génériquement rigide dans l'espace tridimensionnel.

The same techniques provide a simple proof that triangulated projective planes are generically rigid in 3-space (an unpublished result of Graver). **Figure 5** shows two examples of short triangulations of the projective plane. In **Figure 5A**, these are drawn schematically on a disc, with the two ends with the same number identified. **Figure 5B** indicates why these are generically rigid in 3-space.

Theorem 8

Barnette [1]. The two triangulations of **Figure 5** are the only short triangulated projective planes.

Corollary 9

Every triangulated projective plane is generically rigid in 3-space.

There exists an unpublished list of all short one hole tori. A verification of this list leads to a simplified proof of the generic rigidity of triangulations of this surface [8].

Démonstration

Considérons arbitrairement une arête e dans une sphère triangulée plus grande qu'un tétraèdre. Ou bien elle est contractile, ou bien elle appartient à un triangle qui n'est pas une face et qui sépare un disque. Par le lemme 6, il existe une arête contractile à l'intérieur de ce disque. On en déduit que le tétraèdre est la seule sphère triangulée courte. Puisqu'il est génériquement rigide dans l'espace tridimensionnel, toutes les sphères triangulées sont génériquement rigides.

Des techniques semblables permettent d'établir une preuve simple que les plans projectifs triangulés sont génériquement rigides dans l'espace tridimensionnel (c'est un résultat non publié de Graver). La **figure 5** montre deux exemples de triangulations courtes du plan projectif. Dans la **figure 5A**, elles sont tracées de façon schématique sur un disque, deux points terminaux de même numéro étant identifiés. En **5B**, on voit pourquoi elles sont génériquement rigides dans l'espace tridimensionnel.

Théorème 8

Barnette [1]. Les deux triangulations de la **figure 5** sont les seuls plans projectifs triangulés courts.

Corollaire 9

Tout plan projectif triangulé est génériquement rigide dans l'espace tridimensionnel.

Il existe une liste non publiée de tous les tores à un trou courts. Une vérification de cette liste permet d'établir une preuve simplifiée de la rigidité générique des triangulations de cette surface [8].

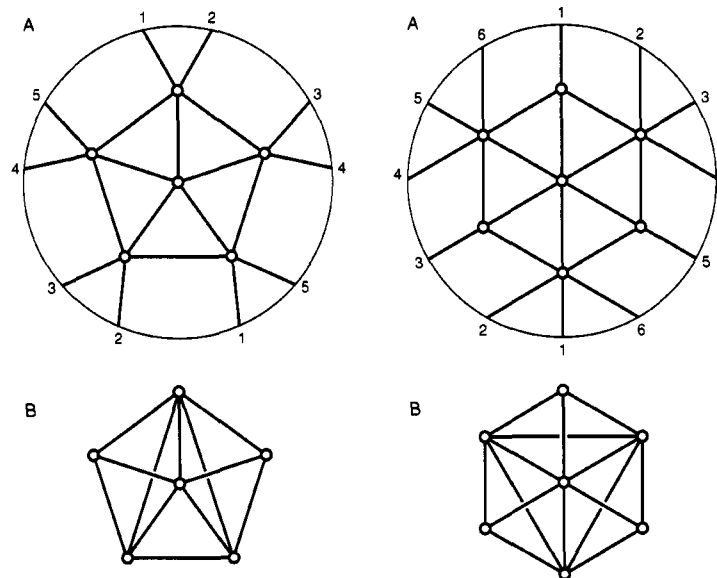
4. ANALOGUES N-DIMENSIONNELS

Une relecture de la preuve montre que les mêmes résultats peuvent être établis dans un espace n -dimensionnel si on divise un sommet le long d'un certain nombre d'arêtes, ce nombre étant inférieur ou égal à $(n-1)$, de directions indépendantes dans l'espace n -dimensionnel. Nous allons énoncer les résultats sans preuves.

FIGURE 5

There are only two short triangulations of the projective plane (**A**). Each of these contains a triangulation of the sphere (**B**), which is generically rigid in 3-space.

Il n'existe que deux triangulations courtes du plan projectif (**A**). Chacune d'elles contient une triangulation de la sphère (**B**) qui est génériquement rigide dans l'espace tridimensionnel.



4. N-DIMENSIONAL ANALOGUES

A rereading of the proof shows that the same results hold in n -space if we split a joint on up to $(n-1)$ edges which have independent directions in n -space. We summarize without proof.

Proposition 10

Given an independent framework $G(\mathbf{p})$ in n -space with a joint \mathbf{p}_1 , the new framework formed by splitting this joint into \mathbf{p}_0 and \mathbf{p}_1 on up to $(n-1)$ bars with independent directions in n -space is independent for almost all positions for the new joint \mathbf{p}_0 .

Corollary 11

Given a statically rigid framework $G(\mathbf{p})$ in n -space with a joint \mathbf{p}_1 , then the new framework formed by a vertex split on $(n-1)$ bars with independent directions is statically rigid in n -space for almost all positions of the added joint \mathbf{p}_0 .

..lll.

Proposition 10

Étant donné une charpente n -dimensionnelle indépendante $G(\mathbf{p})$ possédant un sommet \mathbf{p}_1 , la nouvelle charpente construite par division de ce sommet en \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 le long d'un certain nombre d'arêtes, ce nombre étant inférieur ou égal à $(n-1)$, de directions indépendantes dans l'espace n -dimensionnel, est indépendante pour presque toutes les positions du nouveau sommet \mathbf{p}_0 .

Corollaire 11

Étant donné une charpente n -dimensionnelle statiquement rigide $G(\mathbf{p})$ possédant un sommet \mathbf{p}_1 , la nouvelle charpente construite par une division de sommet le long de $(n-1)$ barres de directions indépendantes est alors statiquement rigide dans l'espace n -dimensionnel pour presque toutes les positions du sommet additionnel \mathbf{p}_0 .

..lll.

BIBLIOGRAPHY BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Barnette
Generating the Triangulations of the Projective Plane.
J. Combinatorial Theory B 33 1982, 22-230
• *A study of vertex splitting in triangulated 2-manifolds; a proof that all triangulated projective planes are generated by vertex splitting from two irreducible examples.*
• *Une étude de la division de sommet dans les variétés bidimensionnelles triangulées; une preuve que tous les plans projectifs triangulés sont engendrés par division de sommet à partir de deux exemples irréductibles.*
- [2] Henry Crapo and Walter Whiteley
Plane stresses and projected polyhedra.
Champlain Regional College, 900 Riverside Drive, St. Lambert, Québec, J4P 3P2, 1986.
• *Maxwell's correspondence between stresses in planar frameworks and projections of spherical polyhedra; introduction of 2-frames with zero-length edges.*
• *La correspondance de Maxwell entre les contraintes dans les charpentes planaires et les projections de polyèdres sphériques; une introduction aux charpentes bidimensionnelles d'arêtes de longueur nulle.*
- [3] A. Folsanger
The generic rigidity of minimal cycles.
Ph.D Thesis, Dept. of Math., Cornell University, 1988.
• *Generic rigidity of all triangulated 2-manifolds in 3-space.*
• *Rigidité générique de toutes les variétés bidimensionnelles triangulées dans l'espace tridimensionnel.*
- [4] H. Gluck
Almost All Simply Connected Closed Surfaces are Rigid.
Geometric Topology, Lecture Notes in Math #438, Springer-Verlag, Berlin and New York, pp. 225-239.
• *Generic rigidity of triangulated spherical polyhedra via Cauchy's Theorem.*
• *Rigidité générique des polyèdres sphériques triangulés via le théorème de Cauchy.*
- [5] J. Graver
A Combinatorial Approach to Infinitesimal Rigidity.
Preprint, Dept. of Math., Syracuse University, Syracuse N.Y. 1984
• *Generic rigidity of graphs in 3-space via inductive matroid arguments.*
• *Rigidité générique des graphes dans l'espace tridimensionnel à l'aide d'arguments inductifs reposant sur les matroïdes.*
- [6] T-S. Tay and Walter Whiteley
Generating isostatic frameworks.
Structural Topology 11 (1985), 21-69.
• *Inductive techniques for generating isostatic frameworks in the plane and 3-space; including the generic rigidity of triangulated spheres.*
• *Techniques inductives pour engendrer des charpentes isostatiques dans le plan et l'espace tridimensionnel; rigidité générique des sphères triangulées.*
- [7] Walter Whiteley
Infinitesimally rigid polyhedra I: Statics of frameworks.
Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), pp.431-465.
• *Static rigidity of convex polyhedra with triangulated faces, and related results.*
• *Rigidité statique des polyèdres convexes à faces triangulées, et résultats connexes.*
- [8] Walter Whiteley
Infinitesimally rigid polyhedra III: toroidal frameworks.
Champlain Regional College, 900 Riverside Drive, St. Lambert, Québec, J4P 3P2, 1985.
• *Generic rigidity of the graphs of triangulated one-holed tori.*
• *Rigidité générique des graphes des tores à un trou triangulés.*
- [9] Walter Whiteley
Infinitesimally rigid polyhedra II: modified spherical frameworks.
Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), pp.115-139.
• *4-connected triangulated spheres with one added bar as generic circuits in 3-space.*
• *Sphères triangulées 4-connexes avec une barre additionnelle considérées comme des circuits génériques dans l'espace tridimensionnel.*
- [10] Walter Whiteley
Unions of matroids and rigidity of frameworks.
SIAM J. Disc. Math. 1 (1988), pp.237-255.
• *Generic rigidity of bar and joint frameworks and alternate types of frameworks via unions of graphic matroids.*
• *Rigidité générique des charpentes de barres et de joints et d'autres types de charpentes à l'aide des unions de matroïdes graphiques.*
- [11] Walter Whiteley
Matrix for splines.
SIAM J. Approx., to appear.
• *Vertex splitting for bivariate splines.*
• *Division de sommet pour des «splines bivariates».*